

LOGICA FUZZY

1. Principiul extensiei

2. Relații fuzzy

2.2. Operații cu relații fuzzy

3. Calcul propozițional în logica fuzzy

4. Variabile și termeni lingvistici

5. Relații fuzzy IF-THEN

6. Sisteme de inferență fuzzy

6.1. Sisteme de inferență fuzzy de tip Mamdani și Larsen

6.2. Sisteme de inferență fuzzy de tip Takagi-Sugeno-Kang

1. Principiul extensiei

- A mulțime fuzzy definită pe X : $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, $A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$

- o funcție $f : X \rightarrow Y$

- dacă f este injectivă

$$B = f(A) = \frac{\mu_A(x_1)}{y_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{y_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{y_n},$$

unde $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

- dacă f nu este injectivă

$$B = f(A) = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in Y\}$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\}, & \text{dacă } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{dacă } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

generalizare:

- pentru $A_i = \{(x, \mu_{A_i}(x)) \mid x \in X_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, și $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$

$$B = f(A_1, \dots, A_n) = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in Y\},$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \min \{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & \text{dacă } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{dacă } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Exemplul 1.1: Pentru $A = \{(-2, 0.3), (-1, 0.4), (0, 0.8), (1, 1), (2, 0.7)\}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Să se determine $B = f(A)$.

Se calculează $f(-2) = f(2) = 4$, $f(-1) = f(1) = 1$ și $f(0) = 0$

$$\mu_B(4) = \max\{\mu_A(-2), \mu_A(2)\} = \max\{0.3, 0.7\} = 0.7,$$

$$\mu_B(1) = \max\{\mu_A(-1), \mu_A(1)\} = \max\{0.4, 1\} = 1,$$

$$\mu_B(0) = \mu_A(0) = 0.8.$$

Astfel, rezultă $B = \{(0, 0.8), (1, 1), (4, 0.7)\}$.

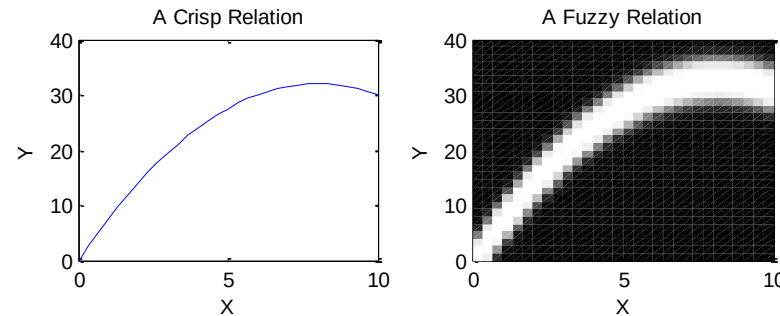


2. Relații fuzzy

O **relație fuzzy** $\mathcal{R}$ între elementele din X și cele din Y este o mulțime fuzzy

$$\mathcal{R} = \left\{ \left((x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \right) \mid (x, y) \in X \times Y \right\}, \quad \mu_{\mathcal{R}} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$$

$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in [0, 1]$ caracterizează „tăria” legăturii dintre elementele x și y .



- dacă $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$,

$$\mathcal{R} \mapsto \mathbf{R} = [r_{ij}] \in [0, 1]^{n \times m}, \quad r_{ij} = \mu_{\mathcal{R}}(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

Exemplul 2.1. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathcal{R} = \text{"}x \text{ este aproximativ egal cu } y\text{"} \mapsto \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Dacă $X = Y = \mathbb{R}$, pentru $\mathcal{R} = \text{"}x \text{ este aproximativ egal cu } y\text{"}$ se utilizează

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = e^{-|x-y|} \quad \text{sau} \quad \mu_{\mathcal{R}}(x, y) = e^{-(x-y)^2}.$$



Dacă $Y = X$, o relație fuzzy $\mathcal{R}$ de la X la X este:

- **reflexivă:** dacă $\mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$ și $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) < 1$, pentru $x \neq y$;
- **antireflexivă:** dacă $\mu_{\mathcal{R}}(x, x) = 0$ și $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) < 1$, pentru $x \neq y$;
- **simetrică:** dacă $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$, pentru orice $x, y \in X$;
- **antisimetrică:** dacă $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \neq \mu_{\mathcal{R}}(y, x)$, pentru $x \neq y$.

2.2. Operații cu relații fuzzy

- **incluziunea:** $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ dacă $\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y)$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$
- **intersecția, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$:** $\mu_{\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2}(x, y) = \min \{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y) \}$
- **reuniunea, $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$:** $\mu_{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}(x, y) = \max \{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(x, y) \}$
- **complementul, $\bar{\mathcal{R}}$:** $\mu_{\bar{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$

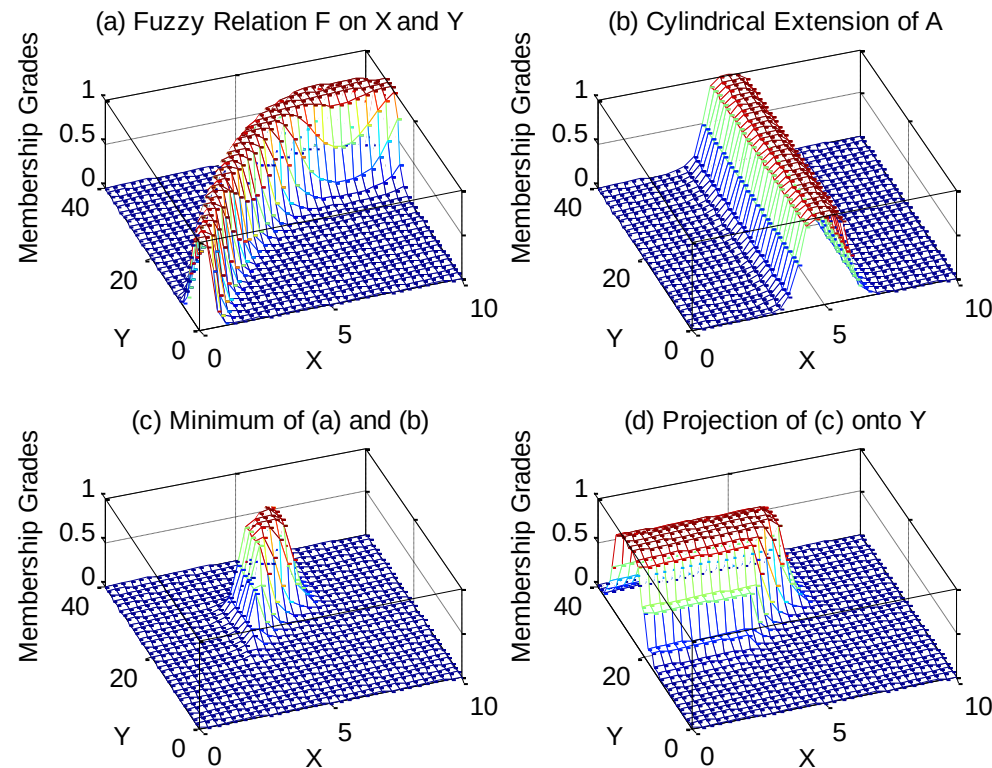
(sau definiții cu T-norme sau T-conorme definite în mod adecvat)

$\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ relație binară

- *proiecția* relației $\mathcal{R}$ pe X : $\mu_{\mathcal{R}_1} : X \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_1}(x) = \max_{y \in Y} \mu_{\mathcal{R}}(x, y),$
- *proiecția* relației $\mathcal{R}$ pe Y : $\mu_{\mathcal{R}_2} : Y \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_2}(y) = \max_{x \in X} \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$

$\mathcal{R} \subseteq X$ relație unară pe X și un spațiu oarecare Y

- *extensia cilindrică* a relației $\mathcal{R}$ pe $X \times Y$: $\mu_{\mathcal{R}_C} : X \times Y \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_C}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x)$



Compunerea a două relații fuzzy

$$\mathcal{R}_1 \subseteq X \times Y, \mathcal{R}_2 \subseteq Y \times Z \mapsto \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \subseteq X \times Z$$

- **max-min** $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ (Zadeh):

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2} : X \times Z \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2}(x,z) = \max_{y \in Y} \left\{ \min \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x,y), \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z) \right\} \right\}.$$

- **max-product** $\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2$:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2} : X \times Z \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2}(x,z) = \max_{y \in Y} \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) \cdot \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z) \right\};$$

- **max-average** $\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2} : X \times Z \rightarrow [0,1], \mu_{\mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2}(x,z) = \frac{1}{2} \max_{y \in Y} \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x,y) + \mu_{\mathcal{R}_2}(y,z) \right\}.$$

- dacă X, Y și Z au număr finit de elemente:

$$\mathcal{R}_1 \mapsto \mathbf{R}_1, \mathcal{R}_2 \mapsto \mathbf{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \mapsto \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \text{ ca produs max-min // max-product // max-sum}$$

proprietăți:

- **asociativitatea:** $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$;
- **distributivitatea față de reuniune:** $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$;
- **distributivitatea față de intersecție:** $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3) \subseteq (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cap (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3)$;
- **monotonicitatea:** dacă $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ atunci $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 \subseteq \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$.

Exemplul 2.2: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z_1, z_2\}$

$$\mathcal{R}_1 \subset X \times Y, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \text{și } \mathcal{R}_2 \subset Y \times Z, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

(i) **compunerea max-min** : $\mathcal{S}_1 = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \subset X \times Z$

$$\mu_{\mathcal{S}_1}(x_i, z_k) = \max \left\{ \min \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_1), \mu_{\mathcal{R}_2}(y_1, z_k) \right\}, \min \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_2), \mu_{\mathcal{R}_2}(y_2, z_k) \right\} \right\},$$

(ii) **compunerea max-product** : $\mathcal{S}_2 = \mathcal{R}_1 * \mathcal{R}_2 \subset X \times Z$

$$\mu_{\mathcal{S}_2}(x_i, z_k) = \max \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_1) \cdot \mu_{\mathcal{R}_2}(y_1, z_k), \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_2) \cdot \mu_{\mathcal{R}_2}(y_2, z_k) \right\},$$

(iii) **compunere max-average** : $\mathcal{S}_3 = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \subset X \times Z$

$$\mu_{\mathcal{S}_3}(x_i, z_k) = \frac{1}{2} \max \left\{ \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_1) + \mu_{\mathcal{R}_2}(y_1, z_k), \mu_{\mathcal{R}_1}(x_i, y_2) + \mu_{\mathcal{R}_2}(y_2, z_k) \right\}, \quad i = \overline{1, 3}, k = \overline{1, 2}.$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.12 \\ 0.36 & 0.32 \\ 0.63 & 0.56 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.45 \\ 0.65 & 0.60 \\ 0.80 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

◆

3. Calcul propozițional în logica fuzzy

Operatori logici: conjuncție ($\wedge$ AND), disjuncție ($\vee$ OR), negație ($\neg$ NOT) și implicație ($\rightarrow$):

- (i) valorile de adevăr 0, 1 și variabilele $a \in [0,1]$ sunt expresii fuzzy;
- (ii) dacă a este expresie fuzzy, atunci $\bar{a}$ este expresie fuzzy;
- (iii) dacă f și g sunt expresii fuzzy, atunci $f \wedge g$ și $f \vee g$ sunt expresii fuzzy.

AND: T-normă $\mathcal{T}$; OR: T-conormă $\mathcal{S}$ și NOT: complement $\mathcal{N}$.

Implicație fuzzy = operator $\mathcal{I} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$:

- monotonicitate în primul argument:
dacă $a \leq c$ atunci $\mathcal{I}(a,b) \geq \mathcal{I}(c,b)$ pentru orice $b \in [0,1]$;
- monotonicitate în al doilea argument:
dacă $b \leq d$ atunci $\mathcal{I}(a,b) \geq \mathcal{I}(a,d)$ pentru orice $a \in [0,1]$;
- $\mathcal{I}(0,b) = 1, \forall b \in [0,1]$; $\mathcal{I}(a,1) = 1, \forall a \in [0,1]$; $\mathcal{I}(1,0) = 0$.

definiții posibile:

$$\begin{aligned}
a \rightarrow b &\equiv \bar{a} \vee b & \mathcal{I}(a,b) &= \mathcal{S}(\mathcal{N}(a), b) \\
a \rightarrow b &\equiv \bar{a} \vee (a \wedge b), & \mathcal{I}(a,b) &= \mathcal{S}(\mathcal{N}(a), \mathcal{T}(a,b)) \\
a \rightarrow b &\equiv (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee b, & \mathcal{I}(a,b) &= \mathcal{S}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)), b)
\end{aligned}$$

cu $\mathcal{T}$ și $\mathcal{S}$ duali în raport cu $\mathcal{N}$ ($\mathcal{S}(a,b) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b)))$).

operatori standard: $a \wedge b = \min\{a,b\}$, $a \vee b = \max\{a,b\}$, $\bar{a} = 1 - a$,

implicația Kleene-Dienes // max-min (Zadeh)

$$a \rightarrow b \equiv \max\{1 - a, b\} \quad \mathcal{I}_{mm}(a,b) = (1 - a) \vee (a \wedge b) = \max\{1 - a, \min\{a,b\}\}$$

Sistemul logic fuzzy de tip Łukasiewicz

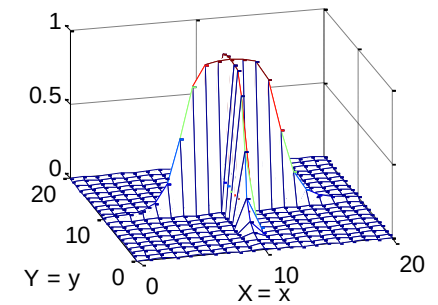
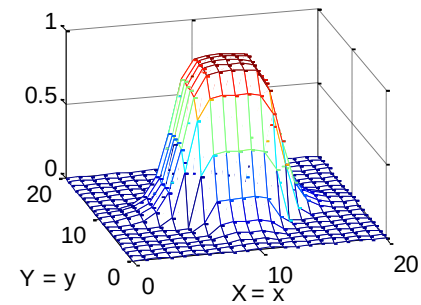
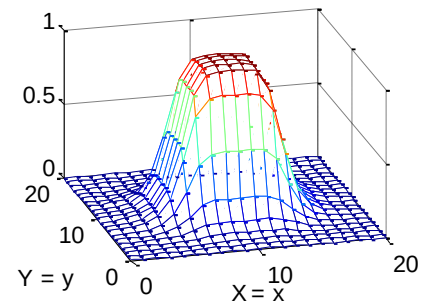
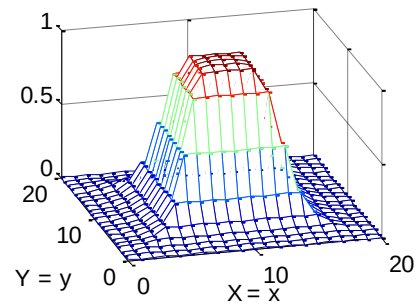
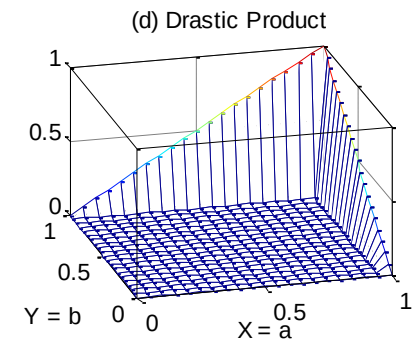
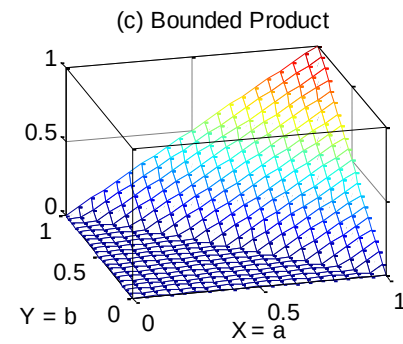
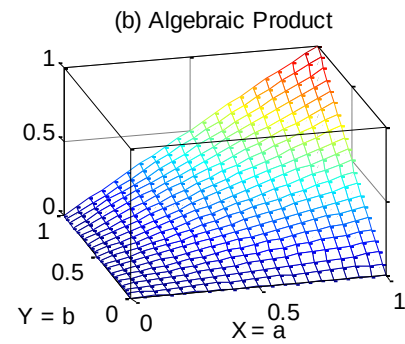
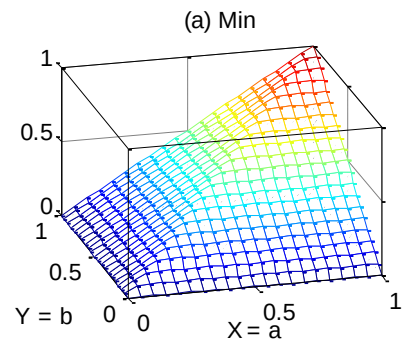
$$\mathcal{T}_{bp}(a,b) = \max\{0, a + b - 1\}, \quad \mathcal{S}_{bs}(a,b) = \min\{1, a + b\}, \quad \mathcal{N}_{bp}(a) = 1 - a, \quad \mathcal{I}_{bp}(a,b) = \min\{1, 1 - a + b\}$$

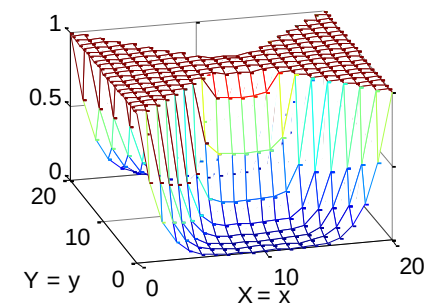
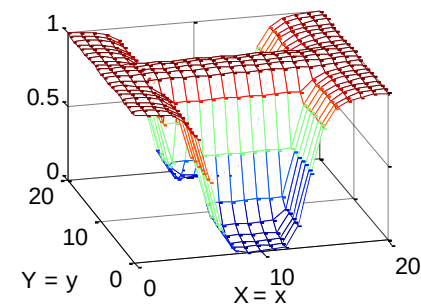
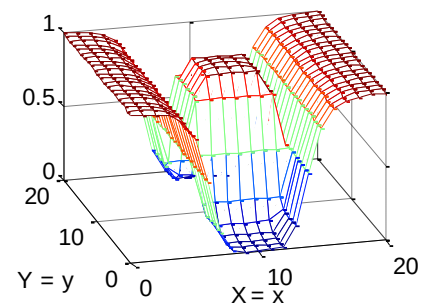
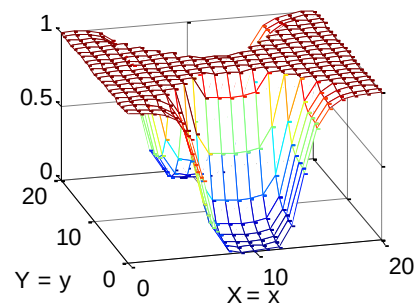
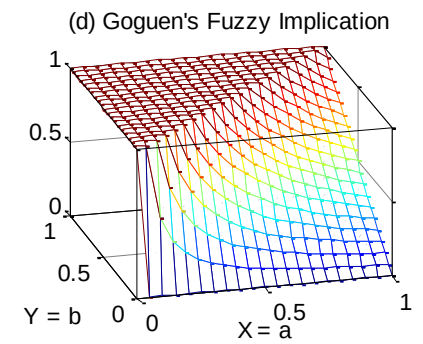
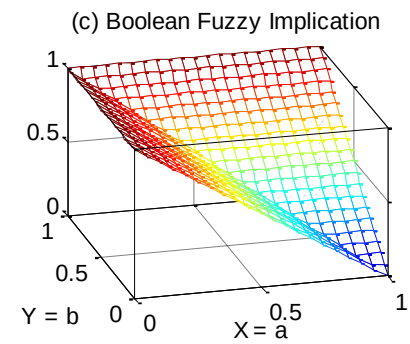
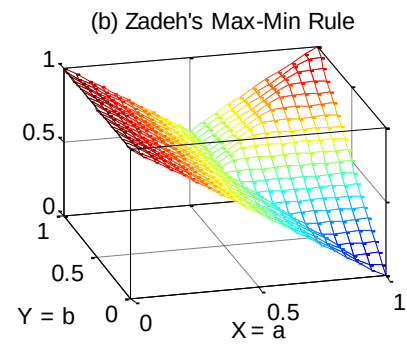
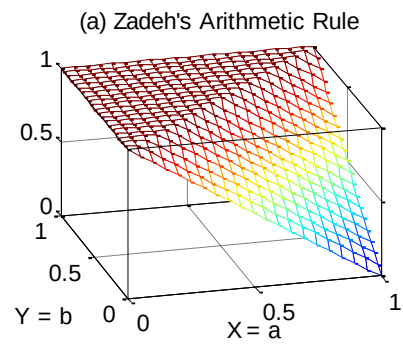
Sistemul logic fuzzy de tip Gödel

$$\mathcal{T}_G(a,b) = \min\{a,b\}, \quad \mathcal{N}_G(a) = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a > 0, \end{cases} \quad \mathcal{I}_G(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$$

Sistemul logic fuzzy de tip Goguen

$$\mathcal{T}_{ap}(a,b) = a \cdot b, \quad \mathcal{N}_G(a) = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a > 0, \end{cases} \quad \mathcal{I}_{ap}(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b/a, & a > b. \end{cases}$$



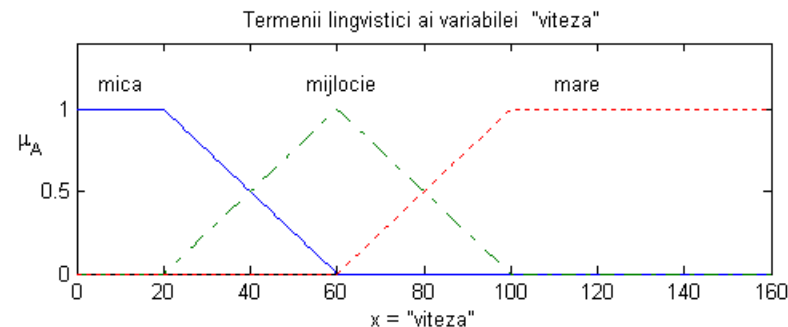


4. Variabile și termeni lingvistici

Variabilă lingvistică $\langle X, T(X), X, \mu \rangle$:

- X – numele variabilei (eticheta acesteia)
- $T(X)$ - mulțimea termenilor lingvistici care pot reprezenta valori ale variabilei X
- X – mulțimea în care termenii lingvistici pot lua valori (universul de discurs)
- o valoare lingvistică A (**termen lingvistic**) din $T(X)$ este o mulțime fuzzy definită pe X prin $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$.

Exemplu: **variabila lingvistică** „viteză” (a unui automobil) caracterizată prin **termenii** „mică”, „mijlocie” și „mare” definiți pe $X = [0,160]$



Termenii lingvistici constau din două părți:

- **termenul primar** – predicat fuzzy de forma „ X este A ” (*mare, mic, cald, rece*)
 - termenul lingvistic A este o mulțime fuzzy.
 - funcția de apartenență μ_A reprezintă gradul în care variabila X satisface proprietatea A .
- un **modifier fuzzy** (*foarte, extrem de, aproape*) utilizat pentru a schimba înțelesul predicatului.
 - din A se obține termenul lingvistic de forma A^k cu funcția de apartenență $\mu_{A^k}(x) = (\mu_A(x))^k$
 - $k = 1/2$: „ X este $A^{1/2}$ ” pentru „ X este *mai mult sau mai puțin* A ”
 - $k = 2$: „ X este A^2 ” pentru „ X este *foarte* A ”
 - $k = 1/3$: „ X este $A^{1/3}$ ” pentru „ X este *aproape* A ”
 - $k = 3$: „ X este A^3 ” pentru „ X este *extrem de* A ”
 - „ X este *exact* A ”: $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_A(x))^k$.

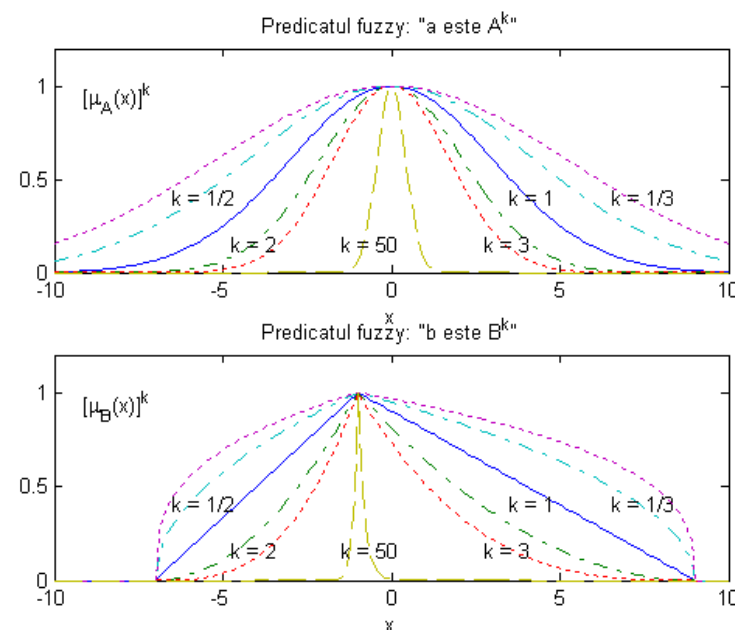
„ X este *într-adevăr* A ”:

$$\mu_{\hat{A}}(x) = \begin{cases} 2[\mu_A(x)]^2 & , \text{dacă } \mu_A(x) \leq 0.5, \\ 1 - 2[1 - \mu_A(x)]^2 & , \text{dacă } \mu_A(x) > 0.5. \end{cases}$$

Exemplu:

$$\mu_A(x) = f_{\text{gauss}}(x; 3, 0)$$

$$\mu_B(x) = f_{\text{tri}}(x; -7, -1, 9).$$



5. Relații fuzzy IF-THEN

$$\mathcal{R}: \text{IF } \underbrace{X \text{ este } A}_{\text{premise (antecedent)}} \text{ THEN } \underbrace{Y \text{ este } B}_{\text{concluzia (consecința)}}$$

unde A și B sunt termeni lingvistici definiți pe spațiile X și Y , ce caracterizează variabilele X și Y

$$\mathcal{R}(x, y): A(x) \rightarrow B(y), \text{ cu } \mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \mathcal{I}(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

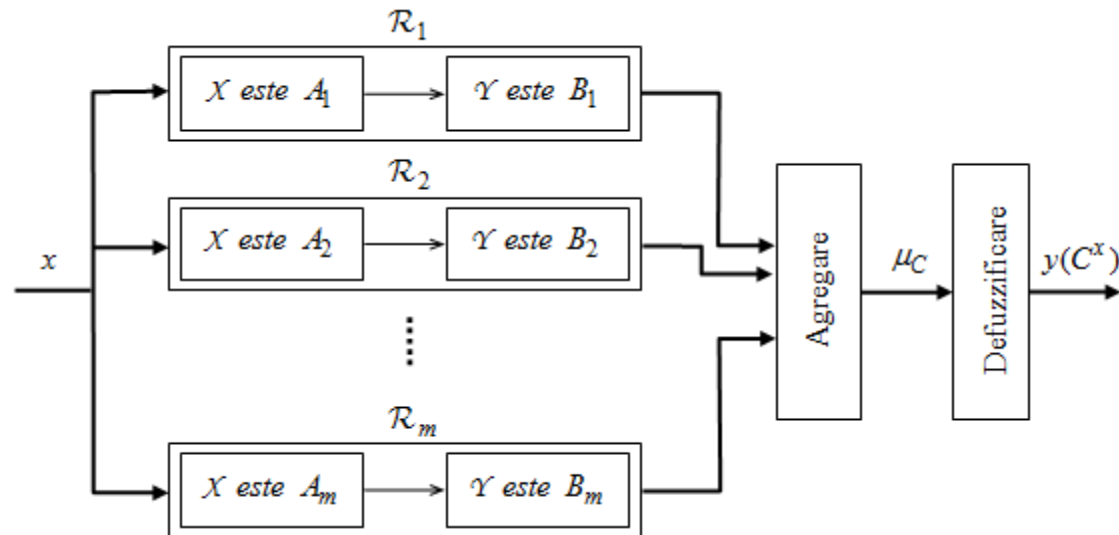
$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \text{ este valoarea de adevăr a propoziției fuzzy } p_{xy}: \text{IF } X = x \text{ THEN } Y = y$$

$$\text{implicația Mamdani: } \mathcal{I}_M(a, b) = \min\{a, b\},$$

$$\text{implicația Larsen: } \mathcal{I}_L(a, b) = a \cdot b.$$

6. Sisteme de inferență fuzzy

6.1. Sisteme de inferență fuzzy de tip Mamdani și Larsen



Agregarea regulilor fuzzy: $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{R}_i$ **operator de agregare** de tip T-conormă, $\mathcal{A}:[0,1]^m \rightarrow [0,1]$

$\mathcal{R}_1$: IF X este A_1 THEN Y este B_1

$\mathcal{R}_2$: IF X este A_2 THEN Y este B_2

... ..

$\mathcal{R}_m$: IF X este A_m THEN Y este B_m

ipoteza $X = x \rightarrow$ **concluzia** este mulțimea fuzzy C^x cu $\mu_{C^x}:Y \rightarrow [0,1]$

$$\mu_{C^x}(y) = \mathcal{A}\left[\mathcal{I}\left(\mu_{A_1}(x), \mu_{B_1}(y)\right), \mathcal{I}\left(\mu_{A_2}(x), \mu_{B_2}(y)\right), \dots, \mathcal{I}\left(\mu_{A_m}(x), \mu_{B_m}(y)\right)\right], y \in Y$$

Sistemul de inferență de tip Mamdani:

- operatorul de implicație: $\mathcal{I}_M(a, b) = \min\{a, b\}$
- operatorul de agregare: $\mathcal{A}_M(a_1, a_2, \dots, a_m) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

concluzia $\mu_{C^x} : Y \rightarrow [0, 1], \quad \mu_{C^x}(y) = \max_{i=1, m} \left\{ \min \left\{ \mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y) \right\} \right\}.$

Sistemul de inferență de tip Larsen:

- operatorul de implicație: $\mathcal{I}_L(a, b) = a \cdot b$
- operatorul de agregare: $\mathcal{A}_M(a_1, a_2, \dots, a_m) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

concluzia $\mu_{C^x} : Y \rightarrow [0, 1], \quad \mu_{C^x}(y) = \max_{i=1, m} \left\{ \mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{B_i}(y) \right\}.$

Defuzzificarea extrage o valoare y care reprezintă mulțimea fuzzy de ieșire C .

Metoda centroidului (eng. *center of area* – COA) returnează abscisa centrului de greutate al suprafeței situate între axa absciselor și graficul funcției de apartenență μ_C .

$$y_{COA}(C) = \frac{\int_{c_1}^{c_2} y \mu_C(y) dy}{\int_{c_1}^{c_2} \mu_C(y) dy},$$

unde $[c_1, c_2]$ este un interval ce conține suportul lui μ_C sau, dacă acesta este nemărginit, $[c_1, c_2]$ este intervalul de interes pentru aplicația considerată.

Dacă Y este mulțime discretă, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, abscisa centroidului este dată de

$$y_{COA}(C) = \frac{\sum_{i=1}^k y_i \mu_C(y_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_C(y_i)}.$$

Dacă $y_{COA}(C)$ nu aparține mulțimii Y , se alege elementul cel mai apropiat de această valoare.

Metoda bisectoarei ariei (eng. *bisector of area* – *BOA*) returnează abscisa $y_{BOA}(C)$ corespunzătoare dreptei de ecuație $y = y_{BOA}(C)$ ce împarte suprafața situată între axa absciselor și graficul funcției de apartenență μ_C în două arii egale.

Dacă Y este mulțime continuă, $y_{BOA}(C)$ se alege astfel încât

$$\int_{c_1}^{y_{BOA}(C)} \mu_C(y) dy = \int_{y_{BOA}(C)}^{c_2} \mu_C(y) dy.$$

În cazul în care $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, considerând punctele ordonate în ordine crescătoare, $y_1 < y_2 < \dots < y_k$, $y_{BOA}(C)$ este dat de

$$\sum_{y=y_1}^{y_{BOA}(C)} \mu_C(y) = \sum_{y=y_{BOA}(C)}^{y_k} \mu_C(y).$$

Dacă $y_{BOA}(C)$ nu aparține mulțimii Y , se alege elementul cel mai apropiat de această valoare.

Metoda centrului maximelor (eng. *center of maxima* – *COM*) consideră mulțimea punctelor în care funcția de apartenență μ_C își atinge valoarea maximă (care reprezintă înălțimea mulțimii fuzzy C , $h(C)$), $M = \{y \in [c_1, c_2] \mid \mu_C(y) = h(C)\}$, și returnează media aritmetică a extremelor sale

$$y_{COM}(C) = \frac{1}{2} [\inf(M) + \sup(M)].$$

În cazul discret, pentru $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, rezultatul defuzzificării este

$$y_{COM}(C) = \frac{1}{2} [\min\{y_j \mid y_j \in M\} + \max\{y_j \mid y_j \in M\}]$$

unde

$$M = \{y_j \in Y \mid \mu_C(y_j) = h(C)\}.$$

Metoda mediei maximelor (eng. *mean of maxima – MOM*) este definită numai în cazul discret și furnizează media aritmetică a tuturor punctelor în care funcția de apartenență μ_C își atinge valoarea maximă $h(C)$:

$$y_{MOM}(C) = \frac{1}{|M|} \sum_{y_k \in M} y_k$$

unde $M = \{y_j \in Y \mid \mu_C(y_j) = h(C)\}$ și $|M|$ notează cardinalul (numărul de elemente al) mulțimii M .

Metodele de defuzzificare **minimul maximelor** (eng. *smallest of maxima – SOM*) și **maximul maximelor** (eng. *largest of maxima – LOM*) returnează marginea inferioară, respectiv cea superioară, a mulțimii M a punctelor în care funcția de apartenență μ_C își atinge valoarea maximă

$$y_{SOM}(C) = \inf(M), \quad y_{LOM}(C) = \sup(M).$$

În cazul discret, dacă $y_{COM}(C)$, $y_{SOM}(C)$ sau $y_{LOM}(C)$ nu aparține mulțimii Y , se alege elementul cel mai apropiat de această valoare.

Toate aceste metode de defuzzificare sunt implementate în pachetul de programe **Fuzzy Logic Toolbox** pentru MATLAB. În practică însă, metodele SOM și LOM sunt mai puțin utilizate decât celelalte metode de defuzzificare prezentate.

Exemplul 6.1. Se consideră un sistem de inferență cu două intrări și o ieșire, și o singură regulă:

$\mathcal{R}$: IF (X_1 este A_1 AND X_2 este A_2) THEN Y este B

unde $\mu_{A_1}(x) = f_{\text{tri}}(x; 0, 2, 4)$, $\mu_{A_2}(x) = f_{\text{tri}}(x; 3, 4, 5)$, $\mu_B(x) = f_{\text{tri}}(x; 0, 2, 6)$, definite pe intervalul $[0, 6]$.

În acest sistem de inferență se consideră **operatorul standard pentru conjuncție** (min).

La intrarea sistemului de inferență se aplică $X_1 = 3$ și $X_2 = 4$.

Cu $\mu_{A_1}(3) = 0.5$ și $\mu_{A_2}(4) = 1$, se obține că valoarea de adevăr a propoziției

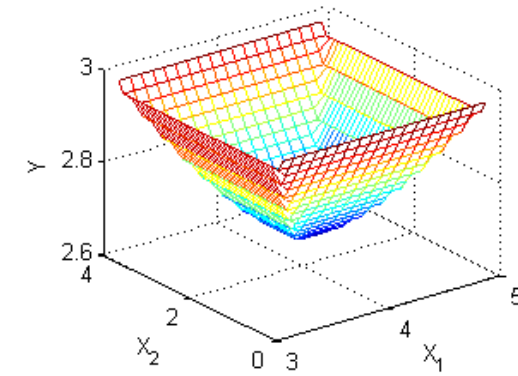
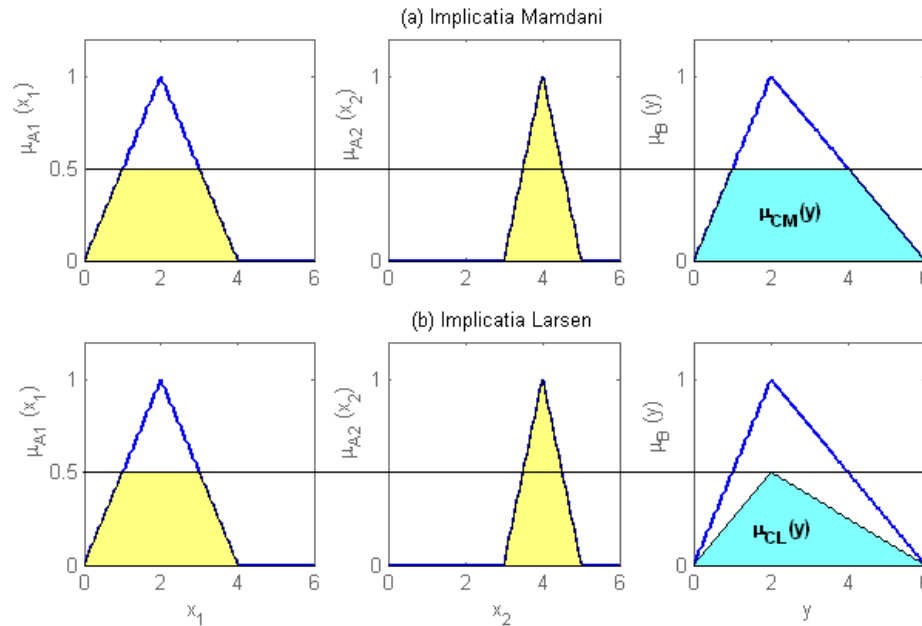
„3 este A_1 AND 4 este A_2 ” este $i = \min\{\mu_{A_1}(3), \mu_{A_2}(4)\} = 0.5$.

Aplicând **implicația Mamdani** $\mathcal{I}_M(i, c) = \min\{i, c\}$ pentru $i = 0.5$, concluzia corespunzătoare regulii $\mathcal{R}$ se obține ca fiind mulțimea fuzzy C_M cu funcția de apartenență:

$$\mu_{C_M} : [0, 6] \rightarrow [0, 1], \quad \mu_{C_M}(z) = \min\left\{\min\{\mu_{A_1}(3), \mu_{A_2}(4)\}, \mu_B(z)\right\}.$$

Aplicând **implicația Larsen** $\mathcal{I}_L(i, c) = i \cdot c$ pentru $i = 0.5$ se obține concluzia corespunzătoare regulii $\mathcal{R}$ ca fiind mulțimea fuzzy C_L cu funcția de apartenență:

$$\mu_{C_L} : [0, 6] \rightarrow [0, 1], \quad \mu_{C_L}(z) = \min\{\mu_{A_1}(3), \mu_{A_2}(4)\} \cdot \mu_B(z).$$

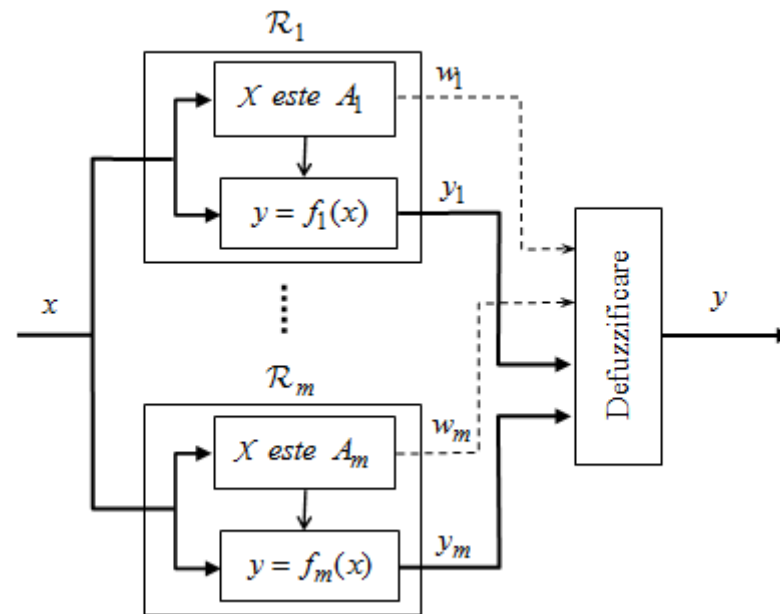


$z_{COA}(C_M)$ funcție de x_1 și x_2 .

Prin defuzzificarea mulțimilor C_M și C_L prin cele cinci metode se obțin valorile:

- metoda centrului de greutate al ariei: $z_{COA}(C_M) = 2.778$, $z_{COA}(C_L) = 2.667$;
- metoda bisectoarei ariei: $z_{BOA}(C_M) = 2.75$, $z_{BOA}(C_L) = 2.55$;
- metoda mediei maximelor: $z_{MOM}(C_M) = 2.50$, $z_{MOM}(C_L) = 2$;
- metoda minimului maximelor: $z_{SOM}(C_M) = 1$, $z_{SOM}(C_L) = 2$;
- metoda maximului maximelor: $z_{LOM}(C_M) = 4$, $z_{LOM}(C_L) = 2$.

6.2. Sisteme de inferență fuzzy de tip Takagi-Sugeno-Kang



Baza de reguli :

$\mathcal{R}_1$: IF $X \text{ este } A_1$ THEN $y = f_1(x)$

$\mathcal{R}_2$: IF $X \text{ este } A_2$ THEN $y = f_2(x)$

... ..

$\mathcal{R}_m$: IF $X \text{ este } A_m$ THEN $y = f_m(x)$

unde $f_1, f_2, \dots, f_m : X \rightarrow Y$.

În practică, X și Y sunt intervale sau mulțimi discrete de numere reale.

În ipoteza $X = x$, valoarea de adevăr a propoziției din antecedentul regulii $\mathcal{R}_j$, $w_j = \mu_{A_j}(x)$, reprezintă „**tăria**” (eng. *firing strength*) regulii $\mathcal{R}_j$ în ansamblul sistemului de reguli considerat.

Această valoare caracterizează contribuția pe care, în ipoteza considerată, ieșirea regulii $\mathcal{R}_j$ $y_j = f_j(x)$, o are la formarea ieșirii y a sistemului de inferență TSK.

Pentru a obține ieșirea y se utilizează una din următoarele metode:

- **suma ponderată** (eng. *weighted sum* – WS) a ieșirilor individuale ale regulilor:

$$y_{WS} = \sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x) \cdot y_j = \sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x) \cdot f_j(x);$$

- **media ponderată** (eng. *weighted average* – WA) a ieșirilor regulilor:

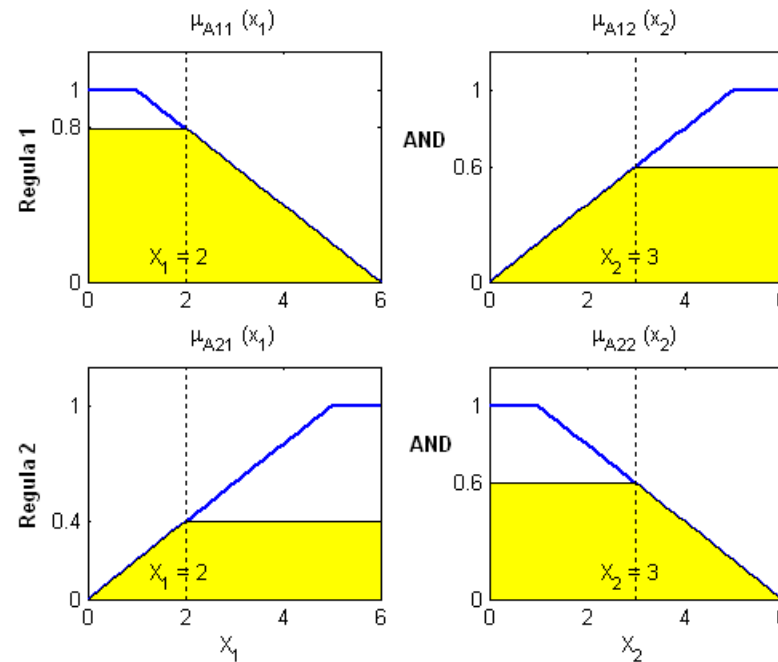
$$y_{WA} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x)} \sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x) \cdot y_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x)} \sum_{j=1}^m \mu_{A_j}(x) \cdot f_j(x).$$

Exemplul 6.2.:

$\mathcal{R}_1$: IF (x_1 este $A_{1,1}$ AND x_2 este $A_{1,2}$) THEN $y = -1$

$\mathcal{R}_2$: IF (x_1 este $A_{2,1}$ AND x_2 este $A_{2,2}$) THEN $y = 1$

unde $\mu_{A_{1,1}}(x) = \mu_{A_{2,2}}(x) = f_{\text{trap}}(x; 0, 0, 1, 6)$, $\mu_{A_{1,2}}(x) = \mu_{A_{2,1}}(x) = f_{\text{trap}}(x; 0, 5, 6, 6)$.



Pentru $x_1 = 2$ și $x_2 = 3$: $\mu_{A_{1,1}}(2) = 0.8$, $\mu_{A_{1,2}}(3) = 0.6$, $\mu_{A_{2,1}}(2) = 0.4$ și $\mu_{A_{2,2}}(3) = 0.6$.

Ieșirile celor două reguli sunt $y_1 = -1$ și $y_2 = 1$

Cu operatorul **min** pentru conjuncție:

- valoarea de adevăr pentru „2 este $A_{1,1}$ AND 4 este $A_{1,2}$ ” este $w_1 = \min\{\mu_{A_{1,1}}(2), \mu_{A_{1,2}}(3)\} = 0.6$
- valoarea de adevăr pentru „2 este $A_{2,1}$ AND 4 este $A_{2,2}$ ” este $w_2 = \min\{\mu_{A_{2,1}}(2), \mu_{A_{2,2}}(3)\} = 0.4$.
- ieșirile sistemului TSK sunt:

weighted sum: $y_{WS} = w_1 y_1 + w_2 y_2 = 0.6 \cdot (-1) + 0.4 \cdot 1 = -0.2,$

weighted average: $y_{WA} = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2} = \frac{0.6 \cdot (-1) + 0.4 \cdot 1}{0.6 + 0.4} = -0.2.$

Cu operatorul **produsul algebric** pentru conjuncție:

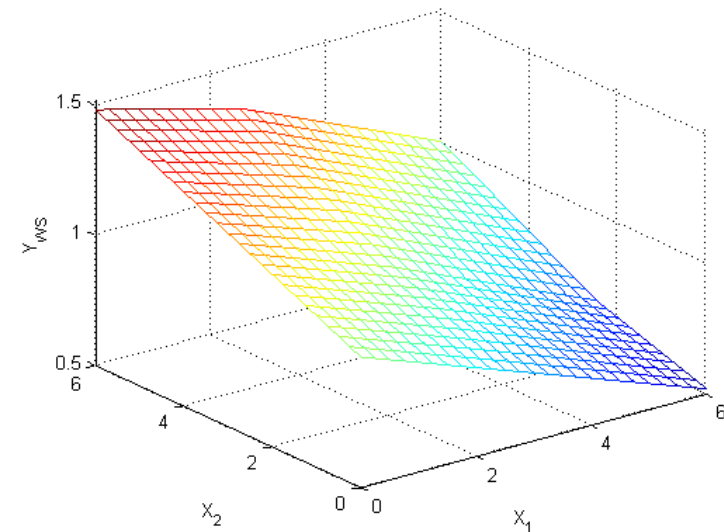
- ponderile regulilor $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ sunt $\tilde{w}_1 = \mu_{A_{1,1}}(2) \cdot \mu_{A_{1,2}}(3) = 0.48$, $\tilde{w}_2 = \mu_{A_{2,1}}(2) \cdot \mu_{A_{2,2}}(3) = 0.24$
- ieșirile sistemului TSK sunt:

weighted sum:

$$\tilde{y}_{WS} = \tilde{w}_1 y_1 + \tilde{w}_2 y_2 = 0.48 \cdot (-1) + 0.24 \cdot 1 = -0.24,$$

weighted average:

$$\tilde{y}_{WA} = \frac{\tilde{w}_1 y_1 + \tilde{w}_2 y_2}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2} = \frac{0.48 \cdot (-1) + 0.24 \cdot 1}{0.48 + 0.24} = -\frac{1}{3}.$$



Reprezentare grafică $\tilde{y}_{WS}(x_1, x_2)$