

Mulțimi fuzzy

1. Noțiuni introductive

Funcția caracteristică a mulțimii $A \subseteq X$ (*mulțime crisp*):

$$\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definiție: O **mulțime fuzzy** (*fuzzy set*) pe spațiul X :

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \quad (1.1)$$

unde aplicația

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \quad (1.2)$$

se numește **funcție de apartenență** (eng. *membership function* – MF).

Valoarea $\mu_A(x)$ reprezintă **gradul de apartenență** a elementului $x \in X$ la mulțimea A . ♦

X - **univers de discurs** (*universe of discourse*) sau **variabilă lingvistică** (*linguistic variable*).

X este mulțime discretă:

$$A = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i$$

X este spațiu continuu:

$$A = \int_X \mu_A(x) / x.$$

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

suport (eng. *support*): $\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$

nucleu (eng. *core*): $\text{core}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}.$

frontiera (eng. *boundary*): $\partial A = \{x \in X \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}.$

înălțimea (eng. *height*) $h(A) = \sup \{\mu_A(x) \mid x \in X\}.$

O mulțime fuzzy A este **normală** (eng. *normal*) dacă $\text{core}(A) \neq \emptyset.$

Un **punct de crossover** (eng. *crossover point*):

$$\text{crossover}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 0.5\}.$$

O mulțime fuzzy al cărei suport este reprezentat de un singur punct x din X , pentru care $\mu_A(x) = 1$ este denumită **fuzzy singleton**.

Fie $(A_i, \mu_{A_i}), i = \overline{1, m}$, mulțimi fuzzy definite pe același univers de discurs X .

m -uplul $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ formează o **partiție fuzzy** a lui X dacă:

i) $\forall i, A_i \neq \emptyset;$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j;$

iii) $\forall x \in X, \sum_{i=1}^m \mu_{A_i}(x) = 1.$

Mulțimea de nivel α (eng. α -cut sau α -level cut) a unei mulțimi fuzzy A

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (1.3)$$

Mulțimea strictă de nivel α (eng. strong α -cut sau strong α -level cut)

$$A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}. \quad (1.4)$$

$$\text{supp}(A) = A'_0, \text{ core}(A) = A_1.$$

O mulțime fuzzy este **convexă** (eng. convex) dacă

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]: \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}.$$

O mulțime fuzzy este **concavă** (eng. concave) dacă

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1]: \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}.$$

Mulțimea fuzzy A pe $\mathbb{R}$ este **simetrică** (eng. symmetric) dacă $\exists c \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mu_A(c+x) = \mu_A(c-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O mulțime fuzzy A pe $\mathbb{R}$ este **deschisă la stânga** (eng. open left) dacă:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 1 \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0.$$

O mulțime fuzzy A pe $\mathbb{R}$ este **deschisă la dreapta** (eng. open right) dacă:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 1.$$

O mulțime fuzzy A pe $\mathbb{R}$ este **închisă** (eng. closed) dacă:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0.$$

Un *număr fuzzy* (eng. *fuzzy number*) reprezintă o mulțime fuzzy pe $\mathbb{R}$ care este normală și convexă.

O asemenea mulțime fuzzy are exact două puncte de crossover, notate în continuare x_{c1}, x_{c2} .

Lățimea (eng. *width*) *unui număr fuzzy* A este:

$$w(A) = |x_{c1} - x_{c2}|, \text{ unde } \mu_A(x_{c1}) = \mu_A(x_{c2}) = \frac{1}{2}.$$



2. Operații uzuale cu mulțimi fuzzy

Fie $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ și $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$.

Mulțimile fuzzy A și B sunt *egale* dacă $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

incluziunea $A \subseteq B$: $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

intersecția (conjuncția): $\mu_{A \cap B}(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \triangleq \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$, $x \in X$. (1.5)

reuniunea (disjuncția): $\mu_{A \cup B}(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \triangleq \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$, $x \in X$. (1.6)

complementul (negația): $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\forall x \in X$. (1.7)

Legea contradicției: $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Legea terțului exclus: $A \cup \bar{A} = X$.

diferența simplă $\mu_{A-B}(x) = \min \{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$ (1.8)

diferența mărginită $\mu_{A \ominus B}(x) = \max \{0, \mu_A(x) - \mu_B(x)\}$ (1.9)

Tabelul 1.1. *Proprietățile operațiilor standard cu mulțimi fuzzy.*

1.	Comutativitate	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2.	Asociativitate	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3.	Distributivitate	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4.	Idempotență	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
5.	Absorbția	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
6.	Absorbția de X sau $\emptyset$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup X = X$
7.	Identitatea	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$
8.	Involuția	$\overline{\overline{A}} = A$
9.	Legile lui de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10.	Formula de echivalență	$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$
11.	Diferența simetrică	$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$

Exemple:

(i) $X = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$A = \{(1, 0.2), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0)\}, \quad B = \{(1, 0.5), (2, 0.3), (3, 1), (4, 0.1)\}.$$

$$A \cap B = \{(1, 0.2), (2, 0.3), (3, 1), (4, 0)\}, \quad A \cup B = \{(1, 0.5), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.1)\}.$$

$$\overline{B} = \{(1, 0.5), (2, 0.7), (3, 0), (4, 0.9)\}.$$

$$A - B = A \cap \overline{B} = \{(1, 0.5), (2, 0.3), (3, 0), (4, 0)\},$$

$$A \ominus B = \{(1, 0), (2, 0.4), (3, 0), (4, 0)\}.$$

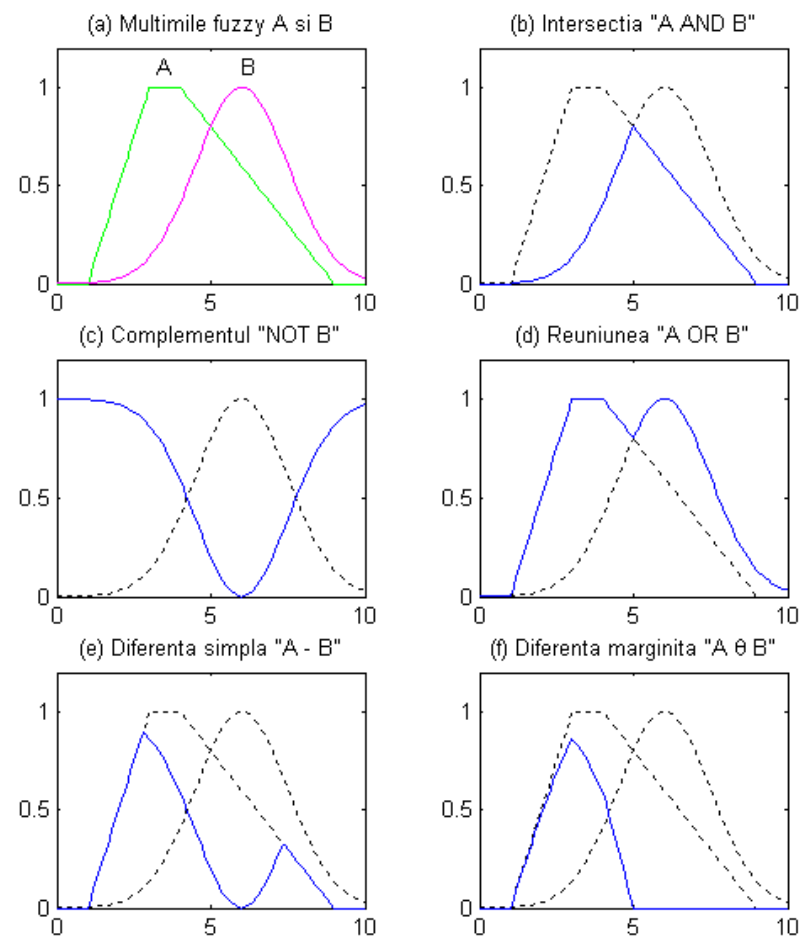


Figura 1.2. *Ilustrarea grafică a operațiilor uzuale cu mulțimi fuzzy.*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \text{ și } B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y \in Y\}$$

produsul cartezian (eng. *cartesian product*) $A \times B \subseteq X \times Y$

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \quad x \in X, y \in Y.$$

coprodusul cartezian (eng. *cartesian co-product*) $A + B \subseteq X \times Y$

$$\mu_{A+B}(x, y) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}, \quad x \in X, y \in Y.$$

3. Funcții de apartenență implementate în MATLAB

Fuzzy Logic Toolbox

$y = \text{nume_mf}(x, \text{param})$

	Funcție de apartenență	Funcție MATLAB	Parametri
1.	triunghiulară	trimf	[a, b, c]
2.	trapezoidală	trapmf	[a, b, c, d]
3.	gaussiană	gaussmf	[sig, c]
4.	combinație de 2 funcții gaussiene	gauss2mf	[sig1, c1, sig2, c2]
5.	clopot generalizat	gbellmf	[a, b, c]
6.	sigmoidală	sigmf	[a, c]
7.	diferență de 2 funcții sigmoidale	dsigmf	[a1, c1, a2, c2]
8.	produs de 2 funcții sigmoidale	psigmf	[a1, c1, a2, c2]
9.	s	smf	[a, b]
10.	z	ymf	[a, b]
11.	pi	pimf	[a, b, c, d]

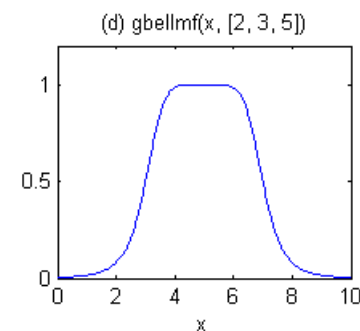
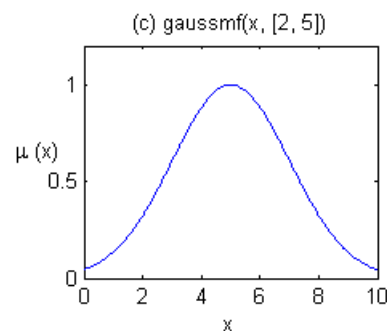
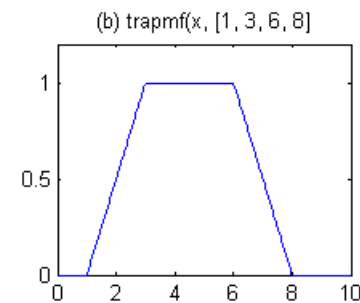
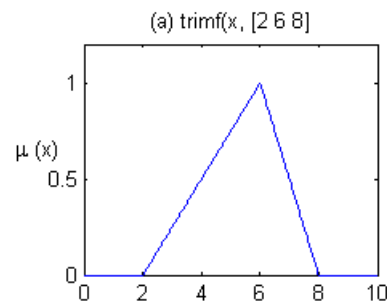
3.1. Funcția triunghiulară

parametri: $a < b < c$,

$$f_{\text{tri}}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0 & , x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , a < x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b} & , b < x \leq c, \\ 0 & , c < x, \end{cases}$$

sau,

$$f_{\text{tri}}(x; a, b, c) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right\}, 0 \right\}.$$



3.2. Funcția trapezoidală

parametri: $a < b < c < d$

$$f_{\text{trap}}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1 & , b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d, \\ 0 & , d < x, \end{cases} \quad (1.11)$$

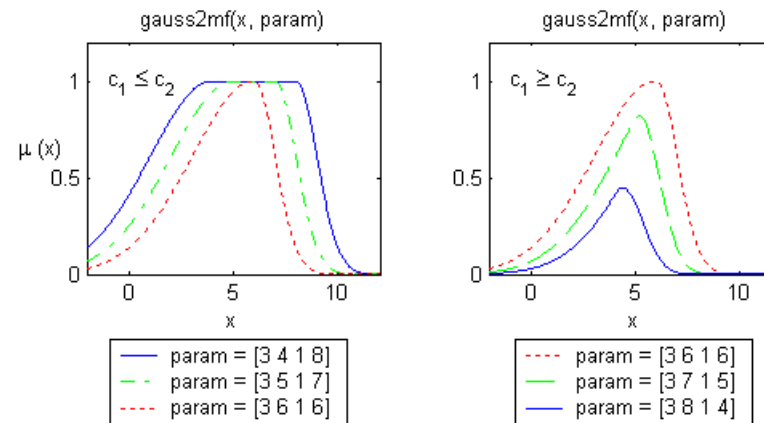
echivalent:

$$f_{\text{trap}}(x; a, b, c, d) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right\}, 0 \right\}. \quad (1.11')$$

3.3. Funcții de tip gaussian

parametri: $\sigma > 0$ și $c \in \mathbb{R}$

$$f_{\text{gauss}}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.12)$$



Graficele funcțiilor de apartenență de tip combinație a două gaussiene:

(a) cazul $c_1 \leq c_2$, (b) cazul $c_1 \geq c_2$

3.4. Funcția de tip clopot generalizat

parametri: a, b și c , cu $a \neq 0$ și $b > 0$.

$$f_{\text{gbell}}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}, \quad (1.13)$$

dacă $b < 0$, atunci funcția ia forma unui clopot inversat.

3.5. Funcții de tip sigmoidal

parametri: $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

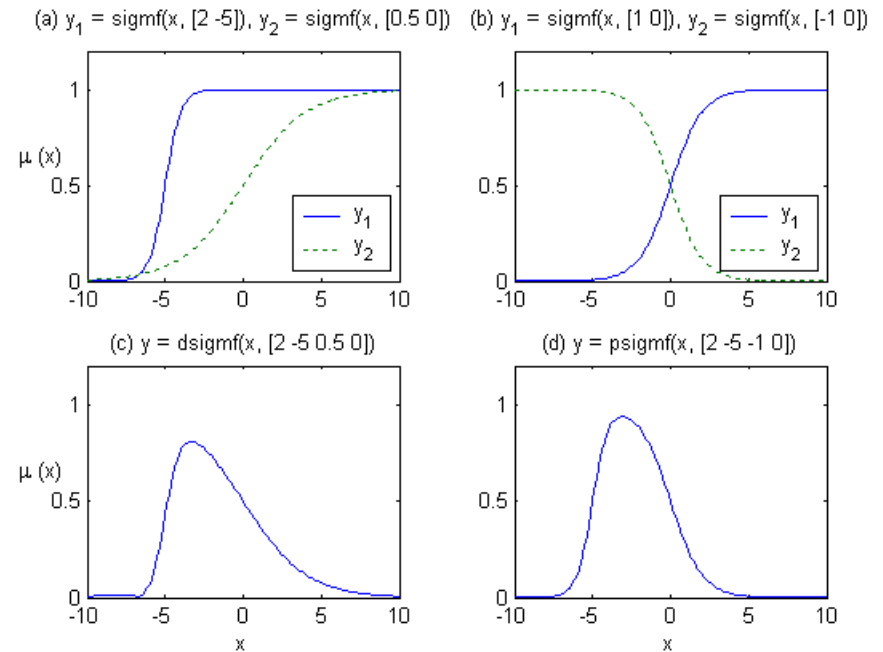
$$f_{\text{sig}}(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

c precizează punctul de crossover

a dă panta tangentei la curbă în acest punct:

dacă $a > 0$, funcția este deschisă la dreapta

dacă $a < 0$, funcția este deschisă la stânga.



diferența a două funcții sigmoidale:

$$f_{\text{dsig}}(x; a_1, c_1, a_2, c_2) = f_{\text{sig}}(x; a_1, c_1) - f_{\text{sig}}(x; a_2, c_2),$$

produsul a două funcții sigmoidale:

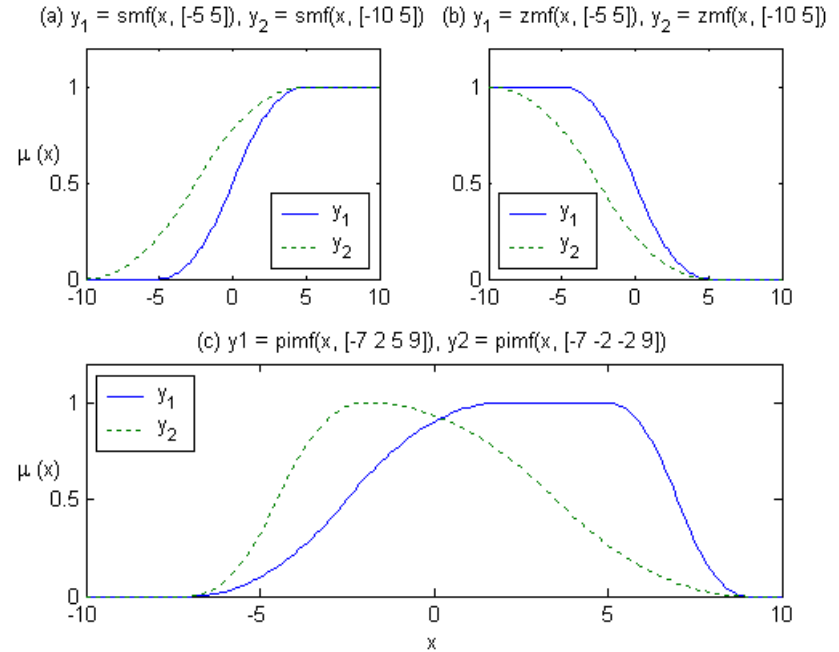
$$f_{\text{psig}}(x; a_1, c_1, a_2, c_2) = f_{\text{sig}}(x; a_1, c_1) \cdot f_{\text{sig}}(x; a_2, c_2)$$

3.6. Funcțiile S, Z și pi

$$f_S(x; a, b) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & , a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 & , \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 1 & , b < x \end{cases}$$

$$f_Z(x; a, b) = \begin{cases} 1 & , x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & , a < x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 & , \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0 & , b < x \end{cases}$$

$$f_{pi}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & , x \leq a \\ f_S(x; a, b) & , a < x < b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ f_Z(x; c, d) & , c < x < d \\ 0 & , d \leq x \end{cases}$$



4. Norme și conorme triunghiulare

4.1. T-norme

Fie $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$ și $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mathcal{T}(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X,$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mathcal{S}(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X.$$

Definiție: Un operator $\mathcal{T} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ este o **T-normă** dacă:

- condiții pe frontieră: $\mathcal{T}(0,0) = 0$; $\mathcal{T}(a,1) = \mathcal{T}(1,a) = a$;
- monotonicitate: $a \leq c$ și $b \leq d$: $\mathcal{T}(a,b) \leq \mathcal{T}(c,d)$;
- comutativitate: $\mathcal{T}(a,b) = \mathcal{T}(b,a)$;
- asociativitate: $\mathcal{T}(a, \mathcal{T}(b,c)) = \mathcal{T}(\mathcal{T}(a,b), c)$.



Operatori de tip T-normă frecvent utilizați

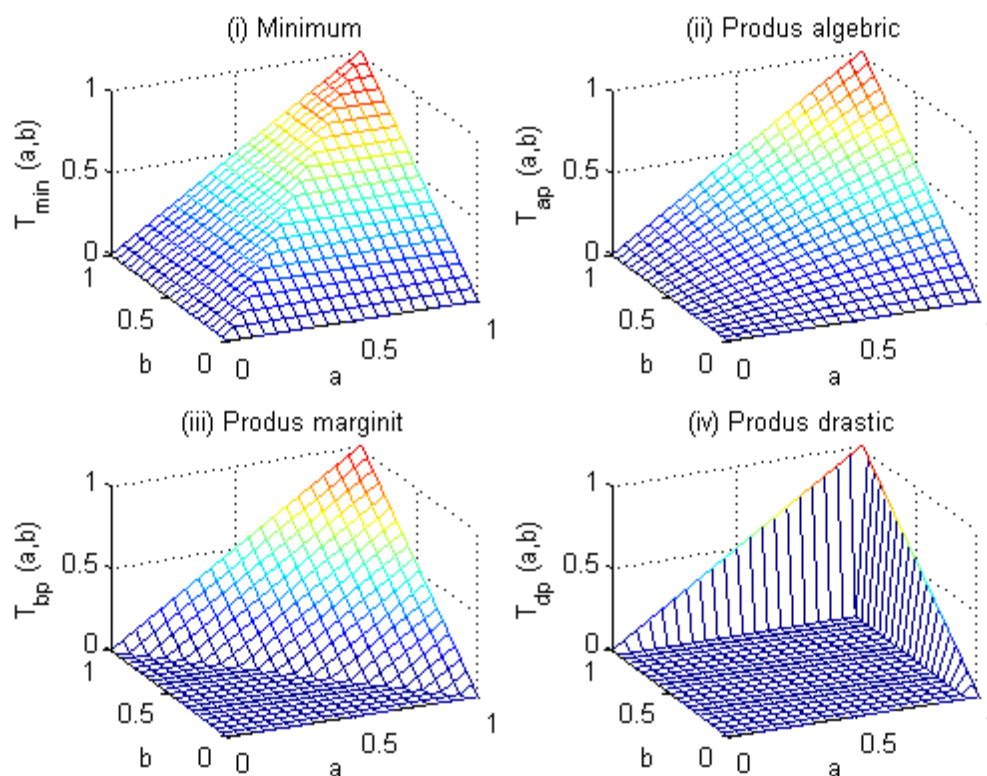
- (i) minimum: $\mathcal{T}_{\min}(a,b) \triangleq a \wedge b = \min\{a,b\}$;
- (ii) produs algebric: $\mathcal{T}_{\text{ap}}(a,b) = a \cdot b$;
- (iii) produs mărginit (Łukasiewicz): $\mathcal{T}_{\text{bp}}(a,b) \triangleq a \odot b = \max\{0, a+b-1\}$;
- (iv) produs drastic: $\mathcal{T}_{\text{dp}}(a,b) \triangleq a \mathbin{\frown} b = \begin{cases} a, & b=1 \\ b, & a=1 \\ 0, & a,b < 1. \end{cases}$

Pentru orice $a, b \in [0,1]$:

$$\mathcal{T}_{dp}(a,b) \leq \mathcal{T}_{bp}(a,b) \leq \mathcal{T}_{ap}(a,b) \leq \mathcal{T}_{\min}(a,b).$$

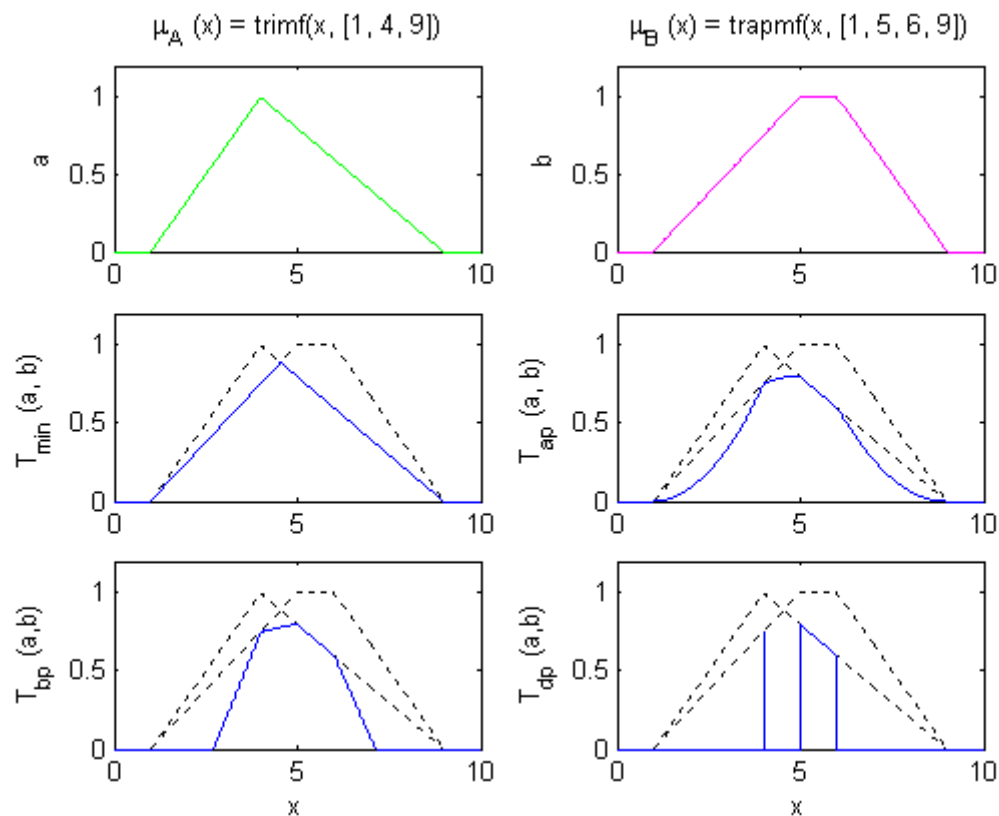
orice T-normă $\mathcal{T}$ satisface

$$\mathcal{T}(a,b) \leq \mathcal{T}_{\min}(a,b) = \min(a,b), \quad \forall a,b \in [0,1].$$



Graficele operatorilor T-normă: (i) minim; (ii) produs algebric; (iii) produs mărginit; (iv) produs drastic.

Exemplu: $\mu_A(x) = f_{\text{tri}}(x; 1, 4, 9)$, și $\mu_B(x) = f_{\text{trap}}(x; 1, 5, 6, 9)$.



*Intersecția a două mulțimi fuzzy determinată cu operatorii de tip T-normă:
(i) minim; (ii) produs algebric; (iii) produs mărginit; (iv) produs drastic.*

Un operator $\mathcal{T}$ de tip T-normă care satisface relația $\mathcal{T}(a,a)=a$ pentru orice $a \in [0,1]$ este denumit *idempotent*.

Operatorul minimum $\mathcal{T}_{\min}$ este idempotent și este singura T-normă idempotentă.

O T-normă continuă care satisface $\mathcal{T}(a,a) < a$ pentru orice $a \in (0,1)$ este denumită *Arhimedeană*.

T-normele produs algebric $\mathcal{T}_{\text{ap}}$ și produs mărginit $\mathcal{T}_{\text{bp}}$ satisfac această condiție.

O T-normă Arhimedeană pentru care $\mathcal{T}(a,a)=0$ numai dacă $a=0$ se numește *strictă*.

Dacă această condiție nu este satisfăcută, se spune ca T-norma respectivă este *nilpotentă*.

Produsul algebric $\mathcal{T}_{\text{ap}}$ este o T-normă strictă iar produsul mărginit $\mathcal{T}_{\text{bp}}$ este o T-normă nilpotentă.

4.2. T-conorme

Definiție: Un operator $\mathcal{S}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ este o **T-conormă** (*S-normă*) dacă:

- condiții pe frontieră: $\mathcal{S}(1,1)=1$; $\mathcal{S}(a,0)=\mathcal{S}(0,a)=a$;
- monotonicitate: $a\leq c$ și $b\leq d$: $\mathcal{S}(a,b)\leq\mathcal{S}(c,d)$;
- comutativitate: $\mathcal{S}(a,b)=\mathcal{S}(b,a)$;
- asociativitate: $\mathcal{S}(a,\mathcal{S}(b,c))=\mathcal{S}(\mathcal{S}(a,b),c)$. ♦

Operatori de tip T-conormă frecvent utilizați

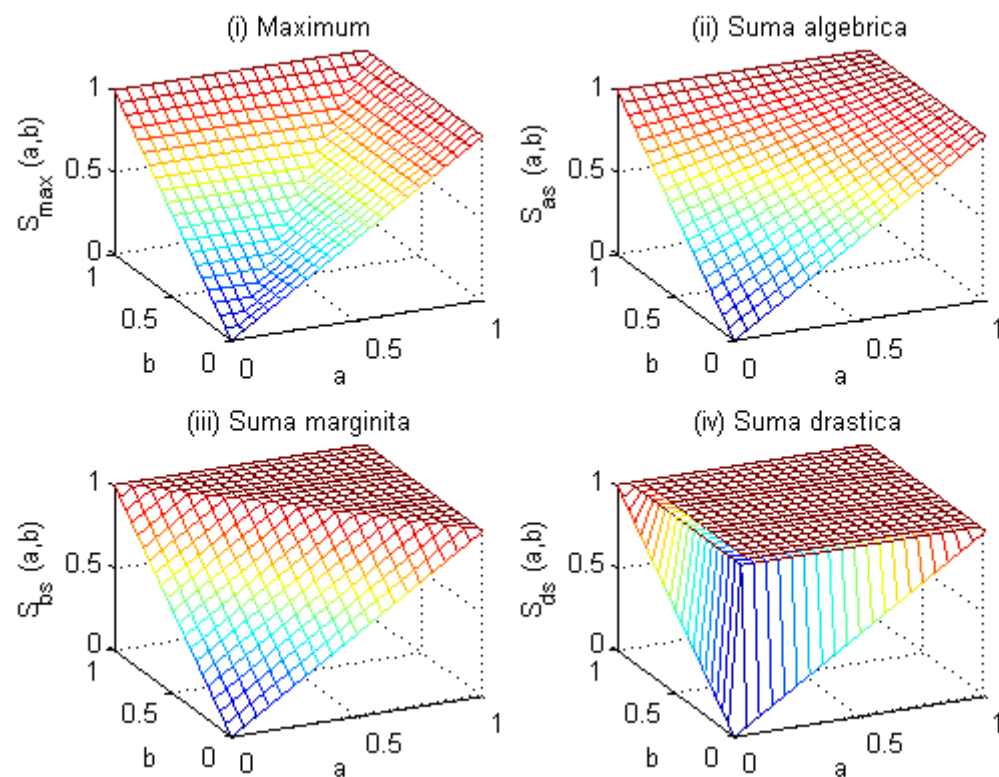
- (i) maximum: $\mathcal{S}_{\max}(a,b)\triangleq a\vee b=\max\{a,b\}$;
- (ii) sumă algebrică: $\mathcal{S}_{\text{as}}(a,b)\triangleq a\hat{+}b=a+b-ab$;
- (iii) sumă mărginită (Łukasiewicz): $\mathcal{S}_{\text{bs}}(a,b)\triangleq a\oplus b=\min\{1,a+b\}$;
- (iv) sumă drastică: $\mathcal{S}_{\text{ds}}(a,b)\triangleq a\downarrow b=\begin{cases} a, & b=0 \\ b, & a=0 \\ 1, & a,b>0. \end{cases}$

Pentru orice $a,b\in[0,1]$, între acești operatori există relația:

$$\mathcal{S}_{\max}(a,b)\leq\mathcal{S}_{\text{as}}(a,b)\leq\mathcal{S}_{\text{bs}}(a,b)\leq\mathcal{S}_{\text{ds}}(a,b).$$

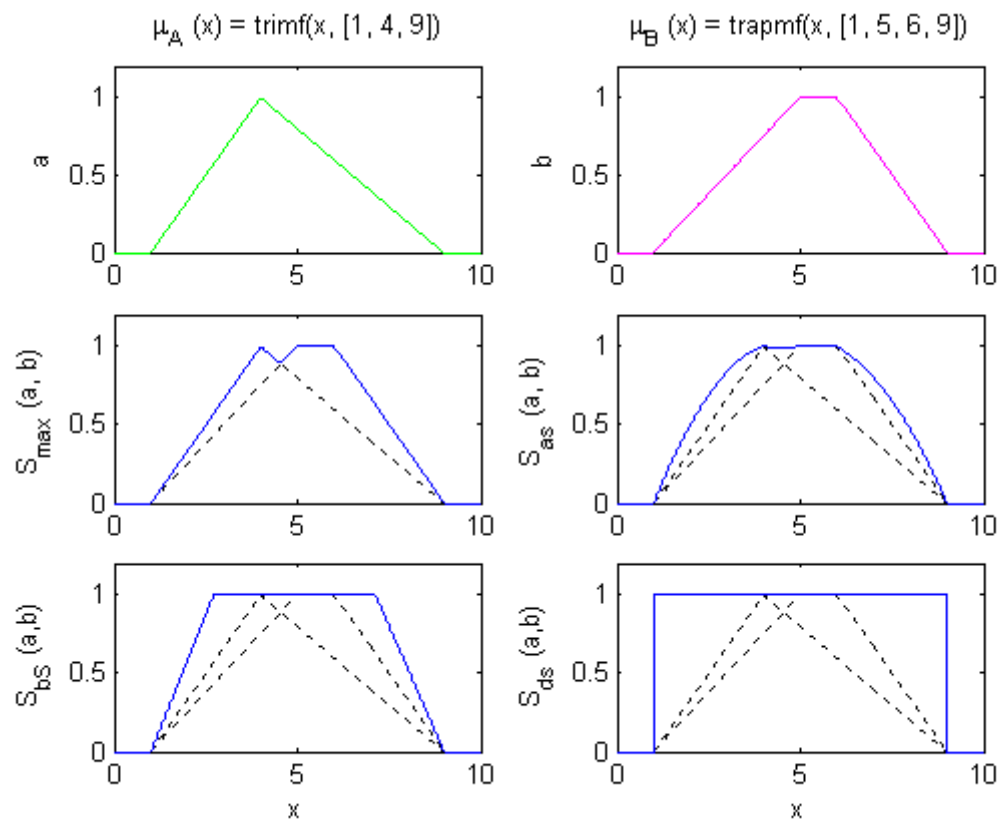
orice T-conormă $\mathcal{S}$ satisface inegalitatea

$$\mathcal{S}(a,b)\geq\mathcal{S}_{\max}(a,b)=\max(a,b), \quad \forall a,b\in[0,1].$$



Graficele operatorilor de tip T-conormă: (i) maxim; (ii) sumă algebrică; (iii) sumă mărginită; (iv) sumă drastică.

Exemplu: $\mu_A(x) = f_{\text{tri}}(x; 1, 4, 9)$ și $\mu_B(x) = f_{\text{trap}}(x; 1, 5, 6, 9)$.



*Reuniunea a două mulțimi fuzzy determinată cu operatorii de tip T-conormă:
 (i) maxim; (ii) sumă algebrică; (iii) sumă mărginită; (iv) sumă drastică.*

Un operator $\mathcal{S}$ de tip T-conormă care satisface relația $\mathcal{S}(a,a)=a$ pentru orice $a \in [0,1]$ este denumit *idempotent*.

Operatorul maximum $\mathcal{S}_{\max}$ este idempotent și este singura T-conormă idempotentă.

O T-conormă continuă care satisface $\mathcal{S}(a,a) > a$ pentru orice $a \in (0,1)$ este denumită *Arhimedeană*.

T-conormele sumă algebrică $\mathcal{S}_{as}$ și sumă mărginită $\mathcal{S}_{bs}$ satisfac această condiție.

O T-conormă Arhimedeană pentru care $\mathcal{S}(a,a)=1$ numai dacă $a=1$ se numește *strictă*.

Dacă această condiție nu este satisfăcută, se spune că T-conorma respectivă este *nilpotentă*.

Sumă algebrică $\mathcal{S}_{as}$ este o T-conormă strictă iar suma mărginită $\mathcal{S}_{bs}$ este o T-conormă nilpotentă.

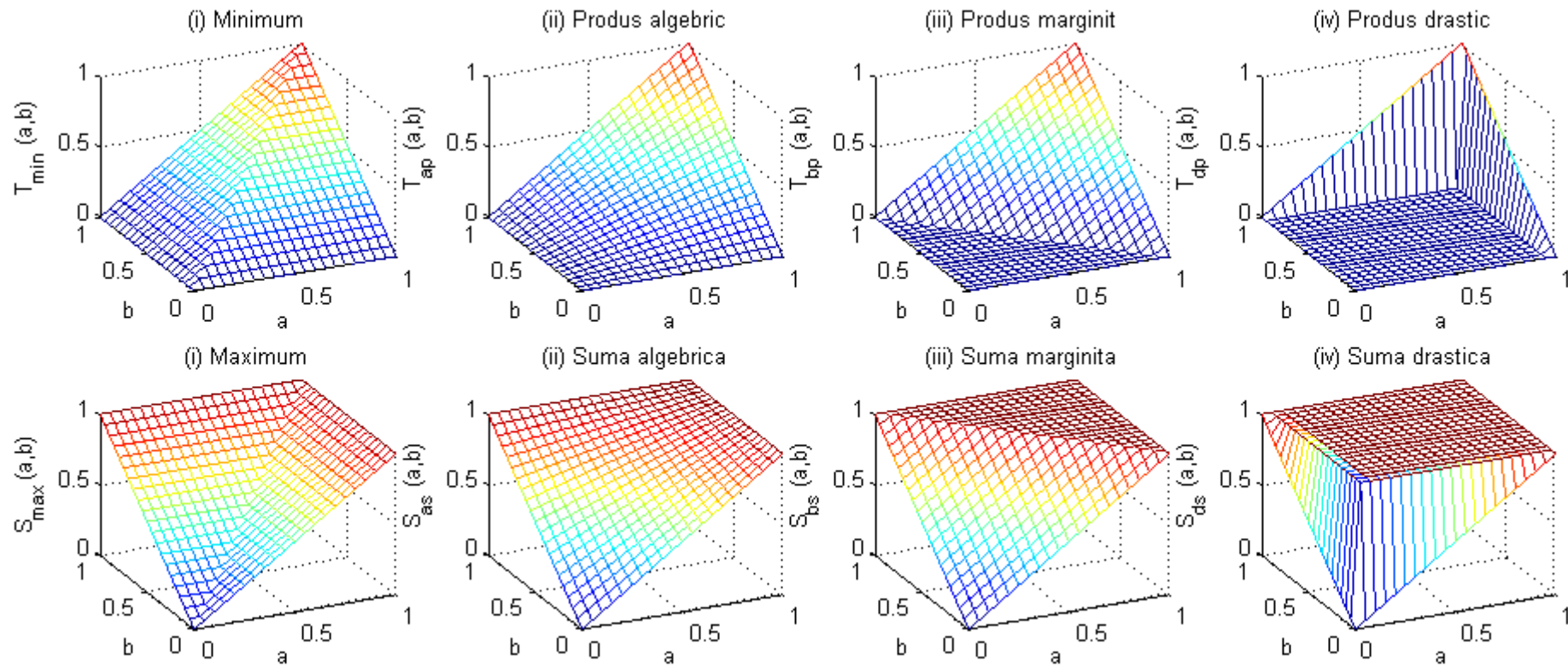
Operatorii de tip T-normă și T-conormă sunt **duali** în sensul următor:

- dacă operatorul $\mathcal{T}$ este de tip T-normă, atunci operatorul $\mathcal{T}'$ este de tip T-conormă

$$\mathcal{T}'(a,b) = 1 - \mathcal{T}(1-a, 1-b), \quad a, b \in [0,1],$$
- dacă operatorul $\mathcal{S}$ este de tip T-conormă, atunci operatorul $\mathcal{S}'$ este de tip T-normă

$$\mathcal{S}'(a,b) = 1 - \mathcal{S}(1-a, 1-b), \quad a, b \in [0,1],$$

Perechile de operatori $(\mathcal{T}_{\min}, \mathcal{S}_{\max})$, $(\mathcal{T}_{ap}, \mathcal{S}_{as})$, $(\mathcal{T}_{bp}, \mathcal{S}_{bs})$ și $(\mathcal{T}_{dp}, \mathcal{S}_{ds})$ sunt duali



4.3. Complement fuzzy

Fie $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \mathcal{N}(\mu_A(x)), \quad x \in X.$$

Definiție: Un operator $\mathcal{N}:[0,1] \rightarrow [0,1]$ este un **complement fuzzy** dacă:

- condiții pe frontieră: $\mathcal{N}(0) = 1, \mathcal{N}(1) = 0;$
- monotonicitate: $a \leq b: \mathcal{N}(a) \geq \mathcal{N}(b);$
- involuție: $\mathcal{N}(\mathcal{N}(a)) = a.$



Oricărei T-norme nilpotente îi poate fi asociată un complement (rezidual) prin relația:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(a) = \max \{b \mid \mathcal{T}(a, b) = 0\}, \quad a \in [0,1].$$

Astfel, operatorul uzual folosit $\mathcal{N}(a) = 1 - a$ este complementul corespunzător produsului mărginit $\mathcal{T}_{bp}$, fiind numit și complement Łukasiewicz.

Legile lui deMorgan generalizate

Dualitatea operatorilor de tip T-normă și T-conormă poate fi generalizată în sensul următor:

- dacă operatorul $\mathcal{T}$ este de tip T-normă, atunci operatorul $\mathcal{T}'$ este de tip T-conormă

$$\mathcal{T}'(a, b) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))), \quad a, b \in [0,1],$$

- dacă operatorul $\mathcal{S}$ este de tip T-conormă, atunci operatorul $\mathcal{S}'$ este de tip T-normă

$$\mathcal{S}'(a, b) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(a), \mathcal{N}(b))), \quad a, b \in [0,1],$$

4.4. Operatori parametrizați

- **operatorii lui Sugeno**, definiți pentru $\lambda > -1$ prin:

$$\mathcal{T}_S(a, b; \lambda) = \max \left\{ 0, \frac{a + b - 1 + \lambda ab}{\lambda + 1} \right\}, \quad a, b \in [0, 1],$$

$$\mathcal{S}_S(a, b; \lambda) = \min \{ 1, a + b - \lambda ab \}, \quad a, b \in [0, 1],$$

$$\mathcal{N}_S(a; \lambda) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a}, \quad a \in [0, 1];$$

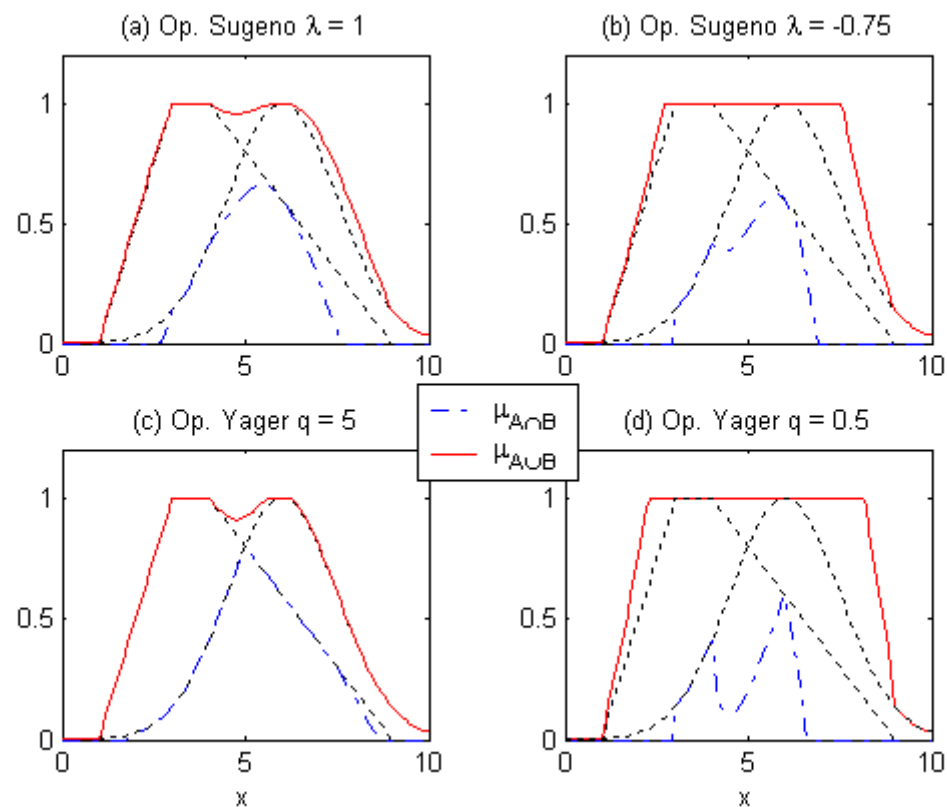
- **operatorii lui Yager**, definiți pentru $q > 0$ prin:

$$\mathcal{T}_Y(a, b; q) = 1 - \min \left\{ 1, \left[(1 - a)^q + (1 - b)^q \right]^{1/q} \right\}, \quad a, b \in [0, 1],$$

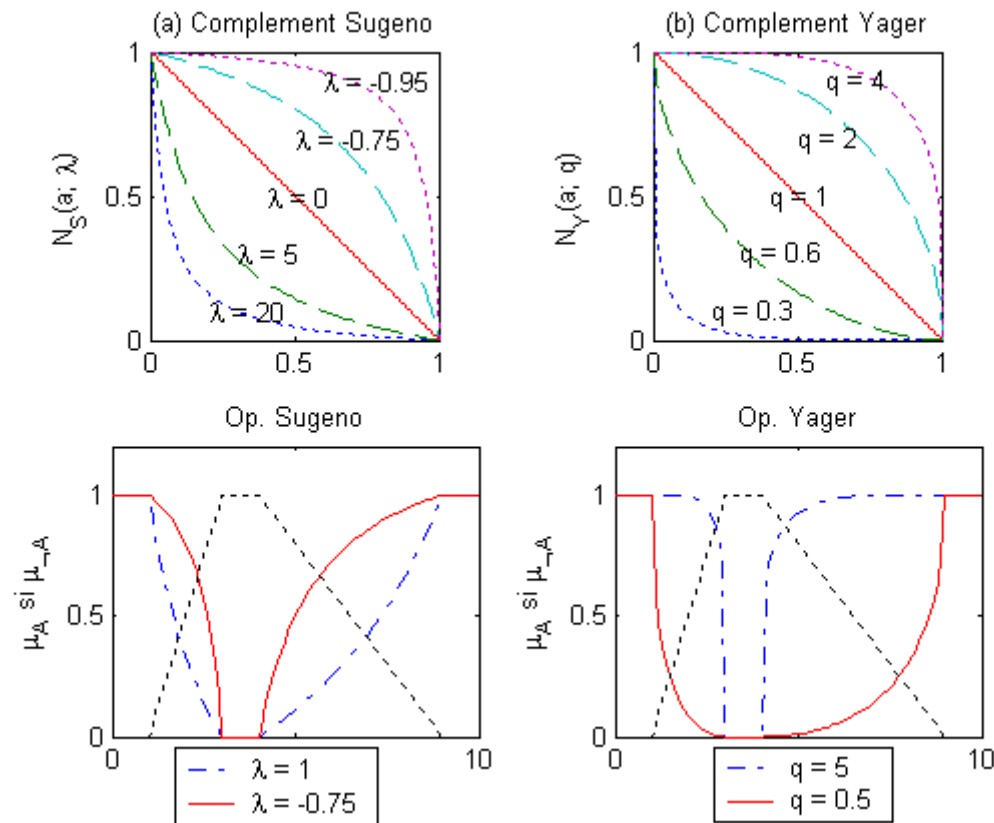
$$\mathcal{S}_Y(a, b; q) = \min \left\{ 1, (a^q + b^q)^{1/q} \right\}, \quad a, b \in [0, 1],$$

$$\mathcal{N}_Y(a; q) = (1 - a^q)^{1/q}, \quad a \in [0, 1].$$

O T-normă Sugeno $\mathcal{T}_S(a, b; \lambda)$ și o T-conormă $\mathcal{S}_S(a, b; \nu)$, definite pentru $\lambda, \nu > -1$, sunt duale (în sensul operatorului de negație $\mathcal{N}(a) = 1 - a$) dacă și numai dacă $\nu = -\lambda / (1 + \lambda)$.



Reuniunea și intersecția a două mulțimi fuzzy determinate utilizând operatori de tip (a)-(b) Sugeno și (c)-(d) Yager pentru diferite valori ale parametrilor lor.



Graficele operatorii complement fuzzy de tip (a) Sugeno și (b) Yager și complementul unei mulțimi pentru diferite valori ale parametrilor lor.