

LOGICA PREDICATELOR

1. Să se rescrie următoarele propoziții folosind predicate și cuantificatori. Pentru fiecare propoziție să se indice predicatorul folosit (sau predicatele folosite) și universul discursului:

- a) Tuturor studenților le place Matematica discretă.
- b) Unii studenți nu mănâncă pizza.
- c) Dacă un student este înfometat, atunci el va mânca pizza.
- d) Fiecare student a pus o întrebare Anei sau a fost întrebat ceva de către Maria.
- e) Nu orice student are bursă.
- f) Sunt studenți care au pus o întrebare oricărui alt student.

2. Fie predicatorul $T(x, y)$: "Studentul x urmează cursul y ". Universul discursului pentru variabila x este format din mulțimea studenților, iar universul discursului pentru variabila y este format din toate cursurile care pot fi urmate de un student.

Traduceți următoarele propoziții în limbaj formal (folosind expresii logice cuantificate):

- a) Orice curs este urmat de cel puțin un student.
- b) Sunt studenți care se duc la toate cursurile.
- c) Nici un student nu merge la toate cursurile.
- d) Există un curs la care merg toți studenții.
- e) Fiecare student merge la cel puțin un curs.
- f) Este un curs la care nu merge nimeni.
- g) Sunt studenți care nu merg la nici un curs.
- h) Nici un curs nu este frecventat de toți studenții.
- i) Sunt cursuri care nu sunt frecventate de nici un student.
- j) Sunt studenți care merg la un singur curs.
- k) Sunt cursuri la care vine un singur student.

3. Fie $P(x)$ un predicator. Să se traducă următoarea propoziție:

Există un x și acesta este unic.

- a) folosind numai cuantificatorul existențial
- b) folosind numai cuantificatorul universal.

4. Să se rescrie următoarele propoziții astfel încât negația să apară numai în fața predicatorilor:

- a) $\neg \forall x \forall y P(x, y)$
- b) $\neg \forall x \exists y P(x, y)$
- c) $\neg \forall y \forall x (P(x, y) \vee Q(x, y))$
- d) $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
- e) $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$

5. Traduceți propozițiile de mai jos folosind predicatele:

Mx,y : "x a trimis un e-mail lui y"

$T(x,y)$: "x a telefonat lui y"

și considerând ca univers al discursului mulțimea studenților din această grupă.

- Ana nu a trimis vreun e-mail și nici nu a telefonat Mariei.
- Există un student care și-a trimis sieși un mesaj.
- Există un student din grupă care a trimis un mesaj sau a telefonat tuturor celorlalți studenți din grupă.
- Sunt cel puțin doi studenți în această grupă din care unul a trimis un e-mail celui de-al doilea și cel de-al doilea a telefonat primului.
- Sunt doi studenți în grupă care au trimis un e-mail sau au telefonat tuturor celorlalți studenți.
- Nici un student din grupă nu a trimis e-mail la exact alți doi studenți din grupă.
- Există un student în grupă care a telefonat unui singur student.

6. Fie universul discursului $U = \{1, 2, 3\}$. Să se scrie următoarele enunțuri fără a folosi cuantificatori, ci doar conectorii logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$:

- $\neg \exists x P(x)$
- $\neg \forall x P(x)$
- $\neg \forall x \exists y N(x, y)$
- $\neg \exists x \forall y N(x, y)$

7. Fie universul discursului $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Exprimați următoarele propoziții fără a utiliza cuantificatori, ci numai conectorii logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

- $\forall x P(x)$
- $\exists x P(x)$
- $\forall x ((x < 3) \rightarrow P(x))$
- $\exists x ((x \text{ este par}) \wedge \neg P(x))$

8. Care din următoarele echivalențe de propoziții sunt adevărate? Explicați sau dați un contraexemplu:

- $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \forall x (P(x) \vee Q(x))$
- $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$
- $\forall x \exists y [P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge K(x, y))] \equiv \forall y \exists x [P(x) \wedge Q(y) \wedge K(x, y)]$

9. Traduceți următoarele propoziții folosind cuantificatori și predicatele indicate. Apoi formați propoziția negată astfel încât nici o negație să nu apară lângă un cuantificator:

a) $P(x, y)$ = 'x a discutat cu y'

Există un student în această grupă care a discutat cu un singur student.

b) $P(x, y)$ = 'x a trimis un email lui y'

Nici un student din grupă nu a trimis un email la exact alți doi studenți.

c) $P(x, y)$ = 'x a pus o întrebare lui y'

Fiecare student din această grupă fie a pus Anei o întrebare, fie a primit o întrebare de la Ana.

d) $P(x)$ = 'x are cel puțin două laturi egale' și $Q(x)$ = 'x este triunghi'

Există triunghiuri care au cel puțin două laturi egale.

e) $P(x)$ = 'x este un număr prim' și $Q(x)$ = 'x este număr impar'

Orice număr prim mai mare decât 2 este impar.

10. Fie predicatul $Q(x, y)$: " $x + y = x - y$ ". Dacă Universul discursului pentru ambele variabile este mulțimea numerelor întregi, care sunt valorile de adevăr ale următoarelor propoziții:

- $\exists y Q(5, y)$
- $\exists x Q(x, 4)$
- $\forall x \exists y Q(x, y)$
- $\forall y \exists x Q(x, y)$
- $\exists y \forall x Q(x, y)$

11. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziții știind că universul discursului pentru fiecare predicat este format din mulțimea numerelor reale:

- $\forall x \exists y (x^2 = y)$
- $\forall y \exists x (x^2 = y)$
- $\exists x \forall y (xy = 1)$
- $\forall x \exists y (xy = 1)$
- $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$
- $\exists x \exists y (2x + 3y = 8 \wedge 3x - 4y = 2)$
- $\forall x \forall y \exists z (z = \frac{1}{y + x})$

12. Fie următoarele predicate

$P(x)$: "x are cel puțin două laturi egale",

$Q(x)$: "x este triunghi"

$R(x)$: "x este dreptunghi"

$S(x)$: "x este pătrat"

Presupunând că universul discursului este format din mulțimea tuturor poligoanelor, să se traducă următoarele propoziții:

- Unele triunghiuri au cel puțin două laturi egale.
- Orice poligon care are cel puțin două laturi egale este dreptunghi.
- Sunt și dreptunghiuri care sunt pătrate.
- Pătratele au cel puțin două laturi egale.

13. Să se traducă folosind cuantificatori:

- Produsul a doi întregi negativi este pozitiv.
- Media a doi întregi pozitivi este pozitivă.
- Diferența a doi întregi negativi nu este în mod necesar negativă.
- Valoarea absolută a sumei a doi întregi nu depășește suma valorilor absolute ale celor doi întregi.

14. Să se traducă următoarele propoziții:

- Nu există un cel mai mare întreg pozitiv.
- Nu există un cel mai mic număr real pozitiv.
- Dacă elementul 1 are proprietatea P și elementul $n + 1$ are proprietatea P când elementul n are proprietatea P atunci orice element din universul discursului are proprietatea P (legea inducției).
- Dacă una sau mai multe vieți au fost pierdute atunci toate viețile au fost pierdute.

15. Un număr real x se numește margine superioară a unei mulțimi S dacă x este mai mare decât sau egal cu orice element din S . Numărul real x se numește cea mai mică margine superioară a unei mulțimi S de numere reale dacă x este o margine superioară a lui S și este mai mic decât sau egal cu orice margine superioară a lui S . Dacă cea mai mică margine superioară a unei mulțimi există, ea este unică.

a) Folosind cuantificatori, exprimați faptul că x este o margine superioară a lui S .

b) Folosind cuantificatori, exprimați faptul că x este cea mai mică margine superioară a lui S .