

PORTI LOGICE. IMPLEMENTAREA FUNCȚIILOR LOGICE FOLOSIND PORTI LOGICE.

1. Obiective

Prin parcurgerea acestei ședințe de laborator studenții vor fi capabili:

- Să definească legile algebrei booleene;
- Să definească operațiile logice pe bit;
- Să reprezinte grafic operatorii sumă logică, produs logic și operatorul de complementare;
- Să enunțe proprietățile fundamentale ale algebrei Booleene;
- Să reprezinte o funcție logică prin tabele de adevăr, sau prin realizant sau în forma analitică;
- Să exprime funcțiile logice în formele canonice FCD și FCC.

Modul de operare al celor mai multe calculatoare digitale moderne se bazează pe sisteme de numerație binare. Sistemele de numerație binare erau bine cunoscute încă din China antică sau de la filozofii greci care au creat un sistem binar foarte bine structurat cunoscut sub denumirea de logică propozițională. Propozițiile pot avea o valoare de adevăr ADEVĂRAT (TRUE) sau FALS (FALSE) și pot fi condiționate ca și funcții formate din alte propoziții conectate prin trei conectori logici: ȘI, SAU și NEGAȚIE. De exemplu, să considerăm următoarea afirmație:

"Dacă afară plouă sau prognoza meteo indică vreme rea, atunci voi lua o umbrelă cu mine."

care conectează funcțional propoziția P1: *"Voi lua o umbrelă cu mine"* cu propozițiile P2: *"afară plouă"* și P3: *"prognoza meteo indică vreme rea"*. Se observă că propoziția P1 este determinată complet de celelalte două propoziții. În termeni funcționali, putem considera că valoarea de adevăr a propoziției P1 este determinată de valorile de adevăr ale propozițiilor P2 și P3.



Figura 1. Reprezentarea în schemă bloc a afirmației *"Dacă afară plouă sau prognoza meteo indică vreme rea, atunci voi lua o umbrelă cu mine."*

Semnificația conectorului SAU este că ieșirea are valoarea ADEVĂRAT dacă măcar una dintre intrări are valoarea ADEVĂRAT; în caz contrar având valoarea de adevăr FALS. Deoarece valoarea de adevăr a unei propoziții poate avea doar una dintre cele două valori, putem calcula

cu ușurință valoarea de adevăr a ieșirii pentru orice valori posibile ale intrării. Se va obține un tabel de adevăr corespunzător funcției logice SAU:

"afară plouă"	"prognoza meteo indică vreme rea"	"voi lua o umbrelă"
FALS	FALS	FALS
FALS	ADEVĂRAT	ADEVĂRAT
ADEVĂRAT	FALS	ADEVĂRAT
ADEVĂRAT	ADEVĂRAT	ADEVĂRAT

Propoziția poate deveni oricât de complexă este nevoie. De exemplu, dacă dorim să includem propoziția "Voi pleca cu mașina" putem construi afirmația în felul următor: "Dacă nu voi pleca cu mașina și afară plouă sau prognoza meteo indică vreme rea, atunci voi lua umbrela.". Reprezentarea afirmației va fi:

$$(Voi\ lua\ umbrela) = (NEGAT\ (Voi\ lua\ mașina))\ \text{ȘI}\ ((Prognoza\ meteo\ indică\ vreme\ rea)\ SAU\ (Afară\ plouă))$$

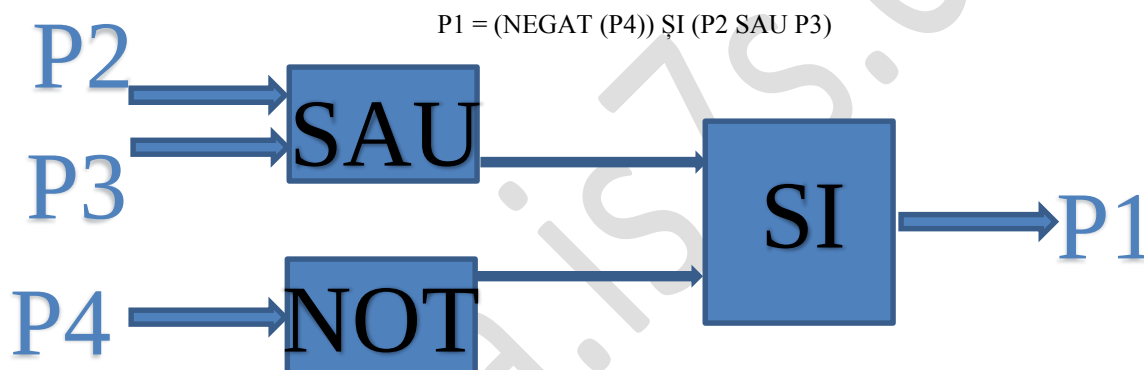


Figura 2. Reprezentarea în schemă bloc a afirmației "Dacă nu voi pleca cu mașina și afară plouă sau prognoza meteo indică vreme rea, atunci voi lua umbrela.".

Pentru a simplifica conexiunile binare complexe, matematicianul George Boole a dezvoltat algebra booleană pornind de la notații algebrice obișnuite și codificând valorile de adevăr prin valori numerice: ADEVĂRAT prin 1 și FALS prin 0.

2. Algebra Booleană

Algebra booleană reprezintă o metodă simbolică pentru studierea relațiilor logice. Algebra booleană este o mulțime compusă din două elemente $M = \{0,1\}$ înzestrată cu două legi de compoziție $+$ ($\cup$) și $\cdot$ ($\cap$), o lege de complementare $\bar{}$ și un set de axiome.

Proprietățile fundamentale ale algebrei Booleene

- 1) Elementele 0 și 1 sunt unice.
- 2) M este o mulțime închisă în raport cu operatorii
 $\forall x, y \in M \Rightarrow 1)x + y \in M; 2)x \cdot y \in M; 3)\bar{x} \in M.$
- 3) Elementul neutru pentru sumă este 0, iar pentru produs este 1.
- 4) Elementul absorbant pentru produs este 0, iar pentru sumă este 1.
- 5) Teorema dublei negații
 $\bar{\bar{x}} = x;$
- 6) Teorema complementării
 $x \cdot \bar{x} = 0; x + \bar{x} = 1;$
- 7) Teorema de idempotență
 $x + x = x; x \cdot x = x;$
- 8) Teorema de absorbție
 $x + (x \cdot y) = x; x \cdot (x + y) = x;$
- 9) Comutativitatea
 $x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x;$
- 10) Asociativitatea
 $x + (y + z) = (x + y) + z; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$
- 11) Distributivitatea
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z; x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z);$
- 12) Legile lui DeMorgan
 $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}; \overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}.$

3. Operații logice elementare

Operatorii logici

Operatori unari

NOT

Operatori binari

SAU

ȘI

XOR

Operatori compuși

SAU NEGAT

ȘI NEGAT

3.1. Operatorul NOT (de complementare)

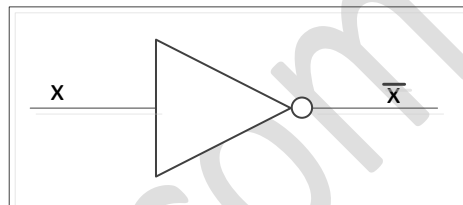
Funcția logică

Tabelul de adevăr

$$f = \bar{x}$$

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Reprezentarea cu poartă logică



3.2. Operatorul SAU (sumă logică)

Operatorul sumă logică este simbolizat prin +, U, V, SAU, OR sau DISJUNCȚIE.

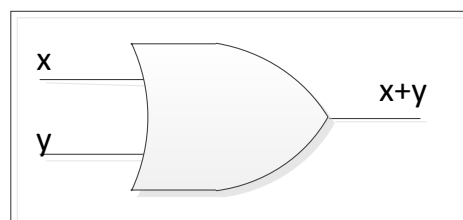
Funcția logică

Tabelul de adevăr

$$f = x + y$$

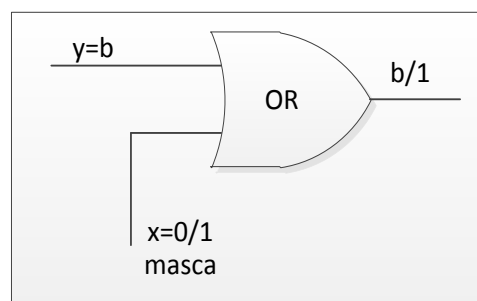
x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Reprezentarea cu poartă logică



Propagarea semnalului

x	y	b
0		b
1		1



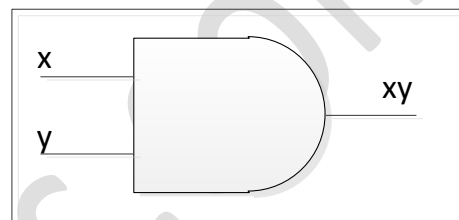
3.3. Operatorul ȘI (produs logic)

Funcția logică
Tabelul de adevăr

$$f = x \cdot y$$

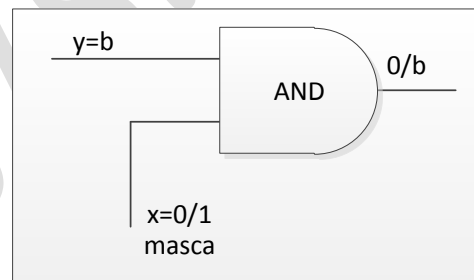
x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Reprezentarea cu poartă logică



Propagarea semnalului

x	y	b
0		0
1		b



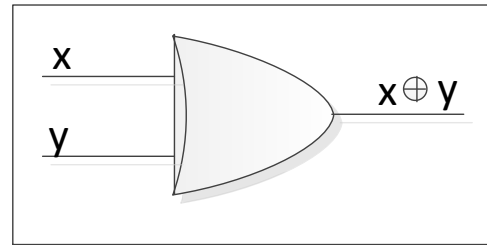
3.4. Operatorul XOR

Funcția logică
Tabelul de adevăr

$$f = x \oplus y$$

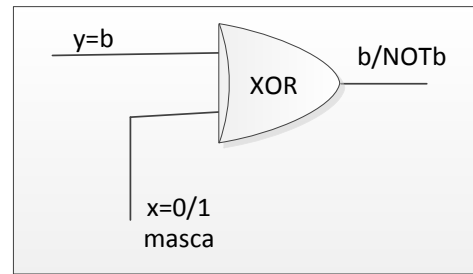
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Reprezentarea cu poartă logică



Propagarea semnalului

x	y	b
0		b
1		$\bar{b}$



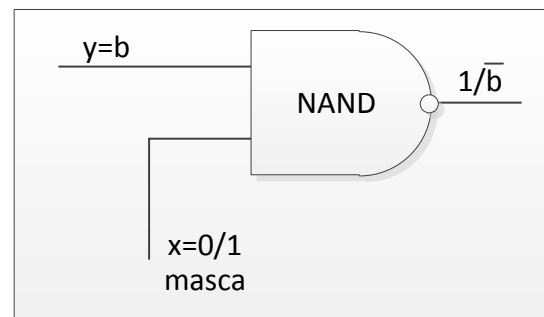
3.5. Operatorul NAND (NOT AND)

Funcția logică
Tabelul de adevăr

$$f = \overline{xy}$$

x	y	$\overline{xy}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Reprezentarea cu poartă logică



3.6. Operatorul NOR (NOT OR)

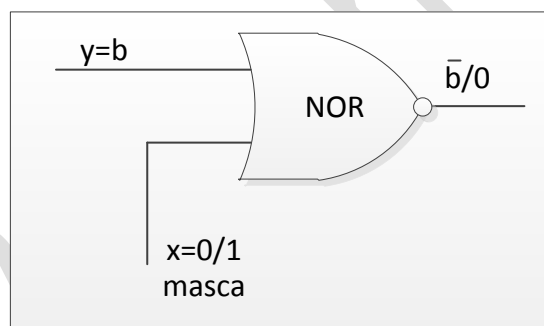
Funcția logică

$$f = \overline{x + y}$$

Tabelul de adevăr

x	y	$\overline{x + y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Reprezentarea cu poartă logică

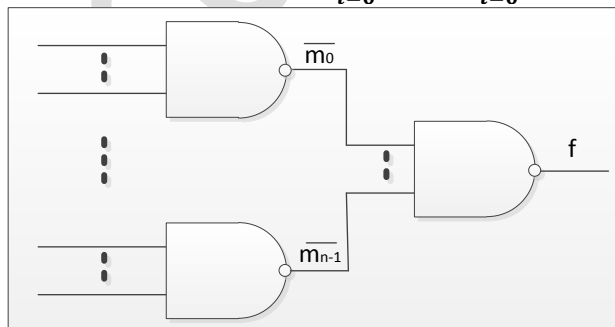


Implementări ale funcțiilor logice cu porți NAND sau NOR

Funcții scrise în forma canonică conjunctivă sau disjunctivă

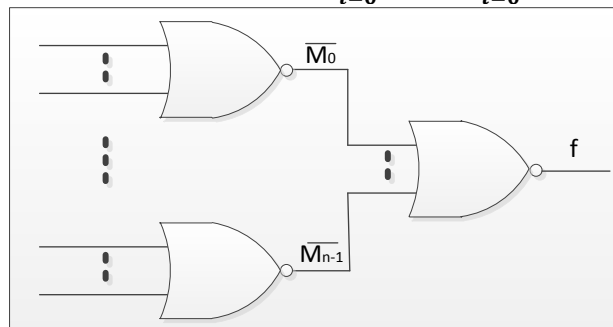
Implementarea cu porți NAND

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = \prod_{i=0}^{2^n-1} \overline{m_i}$$



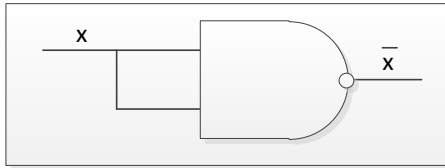
Implementarea cu porți NOR

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{M_i}$$

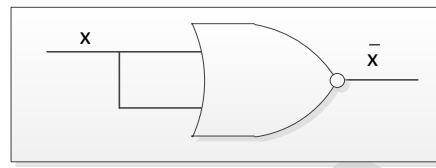


Implementarea porții NOT

Implementarea cu portii NAND

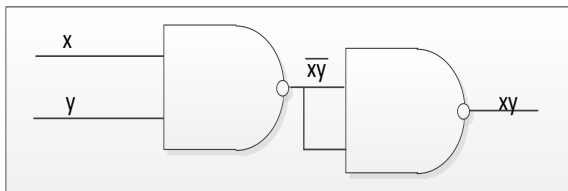


Implementarea cu portii NOR

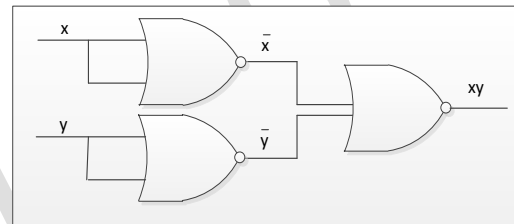


Implementarea porții AND

Implementarea cu portii NAND

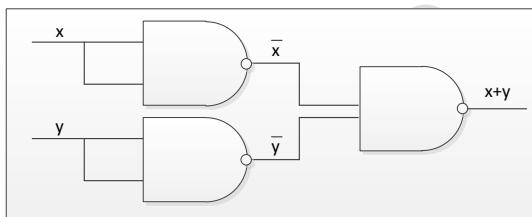


Implementarea cu portii NOR

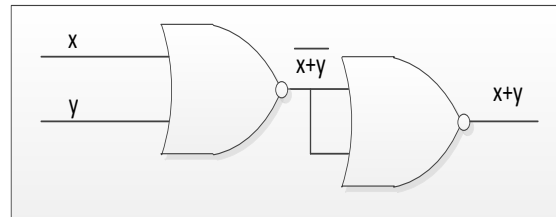


Implementarea porții OR

Implementarea cu portii NAND



Implementarea cu portii NOR



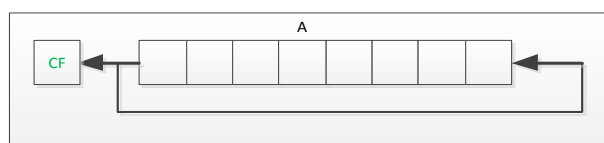
Costul unei scheme logice este numărul de intrări în circuitele logice elementare folosite în implementarea funcției.

Numărul de nivele dintr-o schemă logică este numărul maxim de porți străbătute de semnal de la intrare la ieșire.

3.7. Operatori pentru rotație

Rotație la stânga prin carry (RAL)

Se rotește conținutul operandului la stânga, prin carry cu numărul de poziții specificat. Bitul CF nu face parte din rezultat, dar recepționează o copie a bitului care a fost deplasat de la un capăt la celălalt.



Exemplu:

b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1xRAL

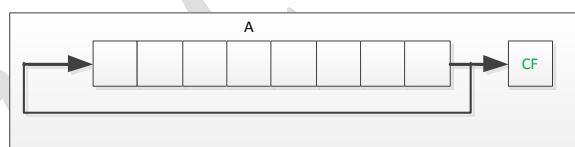
b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	CF
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	----

2xRAL

b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	CF	b_7
-------	-------	-------	-------	-------	-------	----	-------

Rotație la dreapta prin carry (RAR)

Se rotește conținutul operandului la dreapta, prin carry cu numărul de poziții specificat. Bitul CF nu face parte din rezultat, dar recepționează o copie a bitului care a fost deplasat de la un capăt la celălalt.



Exemplu:

b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1xRAR

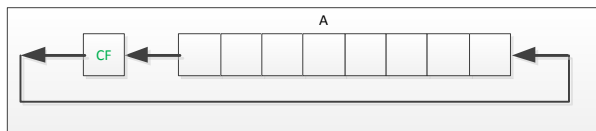
CF	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

2xRAR

b_0	CF	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2
-------	----	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Rotație la stânga cu carry (RLC)

Se rotește conținutul operandului la stânga, cu tot cu carry, cu numărul de poziții specificat. Bitul CF face parte din informația rotită.

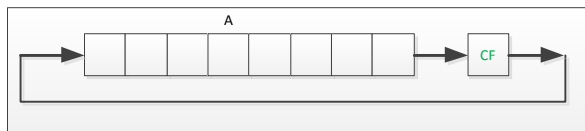


Exemplu:

b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Rotație la dreapta cu carry (RRC)

Se rotește conținutul operandului la dreapta, cu tot cu carry, cu numărul de poziții specificat. Bitul CF face parte din informația rotită.



Exemplu:

b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1xRLC

b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	b_7
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1xRRC

b_0	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

2xRLC

b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	b_7	b_6
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

2xRRC

b_1	b_0	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

4. Funcții logice

4.1. Reprezentarea prin tabel de adevăr

Se reprezintă pe primele coloane variabilele de intrare și pe ultimele valorile de ieșire. În cazul de mai jos avem 3 variabile de intrare x, y, z și o ieșire $f(x, y, z)$. Pe primele trei coloane vom avea $2^3 = 8$ variante posibile pentru cele 3 variabile de intrare, iar pe ultima valoarea lui f pentru fiecare dintre combinații.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

4.2. Reprezentarea prin realizant

În cazul reprezentării prin realizant se consideră că funcția va lua valoarea 0, respectiv valoarea 1 pentru valorile variabilelor de intrare specificate între paranteze. Pentru exemplul de mai jos, funcția va avea valoarea 0 pentru 1, 2, 6 și 7 (001, 010, 110, 111) și va avea valoarea 1 pentru 0, 3, 4 și 5 (000, 011, 100, 101).

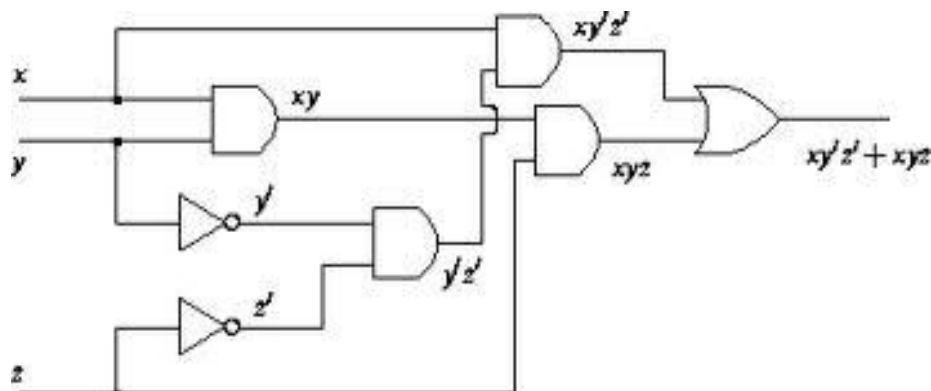
$$f(x, y, z) = R_0(1, 2, 6, 7);$$

$$f(x, y, z) = R_1(0, 3, 4, 5).$$

4.3. Reprezentarea analitică (prin formulă)

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z.$$

4.4. Reprezentarea cu porți logice



4.5. Formele canonice ale funcțiilor logice

Un **minterm** ("m") este o expresie logică elementară definită pe fiecare combinație posibilă a tuturor variabilelor independente legate prin produs logic și care este întotdeauna evaluată cu 1 logic.

Un **maxterm** ("M") este o expresie logică elementară definită pe fiecare combinație posibilă a tuturor variabilelor independente legate prin sumă logică și care este întotdeauna evaluată cu 0 logic.

FCD Forma Canonică Disjunctivă (suma de produse)

$$FCD = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot f_i$$

unde

n – este numărul variabilelor independente;

f_i – reprezintă valoarea funcției f pentru echivalentul zecimal i.

FCC Forma Canonică Conjunctivă (produs de sume)

$$FCC = \prod_{i=0}^{n-1} M_i + f_i$$

unde

n – este numărul variabilelor independente;

f_i – reprezintă valoarea funcției f pentru echivalentul zecimal i.

Exemplu: Se consideră funcția $f(x, y, z) = R_1(0, 2, 3, 7)$, tabelul de adevăr, precum și mintermii și maxtermii funcției sunt ilustrați mai jos:

Echivalentul zecimal	x	y	z	m_i	M_i	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	$m_0 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$M_0 = x + y + z$	1
1	0	0	1	$m_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$M_1 = x + y + \bar{z}$	0
2	0	1	0	$m_2 = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$M_2 = x + \bar{y} + z$	1
3	0	1	1	$m_3 = \bar{x} \cdot y \cdot z$	$M_3 = x + \bar{y} + \bar{z}$	1
4	1	0	0	$m_4 = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$M_4 = \bar{x} + y + z$	0
5	1	0	1	$m_5 = x \cdot \bar{y} \cdot z$	$M_5 = \bar{x} + y + \bar{z}$	0
6	1	1	0	$m_6 = x \cdot y \cdot \bar{z}$	$M_6 = \bar{x} + \bar{y} + z$	0
7	1	1	1	$m_7 = x \cdot y \cdot z$	$M_7 = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	1

$$FCD = m_0 \cdot 1 + m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 1 + m_3 \cdot 1 + m_4 \cdot 0 + m_5 \cdot 0 + m_6 \cdot 0 + m_7 \cdot 1;$$

$$FCC = (M_0 + 1) \cdot (M_1 + 0) \cdot (M_2 + 1) \cdot (M_3 + 1) \cdot (M_4 + 0) \cdot (M_5 + 0) \cdot (M_6 + 0) \cdot (M_7 + 1).$$

5. Aplicații propuse

5.1. Să se demonstreze următoarele echivalențe utilizând tabele de adevăr:

- $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z);$
- $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y};$
- $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}.$
- $\overline{\bar{x} + y + \bar{x} + \bar{y}} = x;$
- $\overline{x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{z}.$

a)

x	y	z	yz	x+yz	x+y	x+z	(x+y)(x+z)
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

b)

c)

Corina.is7s.com

d)

e)

Corina.is7s.com

5.2. Să se reprezinte prin tabele de adevăr funcțiile:

a) $f(x, y, z) = R_0(1, 2, 6, 7);$

b) $f(x, y, z) = R_0(2, 4);$

c) $f(x, y, z) = R_1(3, 5, 6, 7);$

d) $f(x, y, z) = R_1(0, 1, 5).$

a)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

b)

c)

d)

5.3. Să se calculeze:

- a) $x + y \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x}$; c) $\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y}$;
 b) $\bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z$; d) $\bar{x} + y + \bar{x} + \bar{y}$.

a)

x	y	z	w	$\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}$	$w\bar{x}$	$x + y\bar{z} + w\bar{x}$
0	0	0	0					
0	0	0	1					
0	0	1	0					
0	0	1	1					
0	1	0	0					
0	1	0	1					
0	1	1	0					
0	1	1	1					
1	0	0	0					
1	0	0	1					
1	0	1	0					
1	0	1	1					
1	1	0	0					
1	1	0	1					
1	1	1	0					
1	1	1	1					

b)

c)

d)



5.4. Să se descrie cu ajutorul diagramelor următoarele funcții logice:

- a) $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z;$
- b) $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y};$
- c) $f(x, y, z) = x + y + z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z;$

b)



a)

c)

Corina.is7s.com

5.5. Să se scrie FCD și FCC pentru funcțiile:

a) $f(x, y, z) = R_0(0, 1, 2, 4);$

b) $f(x, y, z) = R_1(2, 4, 6, 7).$

a)

b)

5.6. Se dau numerele:

$$A = 01011100$$

$$B = b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$$

Ce numere vor rezulta după aplicarea măștilor specificate?

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) $A \text{ AND } 11111111$ | h) $A \text{ OR } 10000000$ |
| b) $A \text{ AND } 00000000$ | i) $A \text{ XOR } 11111111$ |
| c) $A \text{ AND } 00000001$ | j) $A \text{ XOR } 00000000$ |
| d) $A \text{ AND } 10000000$ | k) $A \text{ XOR } 11110000$ |
| e) $A \text{ OR } 11111111$ | l) $A \text{ XOR } 00001111$ |
| f) $A \text{ OR } 00000000$ | m) $\text{NOT } A$ |
| g) $A \text{ OR } 00000001$ | n) $\text{NOT}(\text{NOT } A)$ |
| A) $B \text{ AND } 11111111$ | H) $B \text{ OR } 10000000$ |
| B) $B \text{ AND } 00000000$ | I) $B \text{ XOR } 11111111$ |
| C) $B \text{ AND } 00000001$ | J) $B \text{ XOR } 00000000$ |
| D) $B \text{ AND } 10000000$ | K) $B \text{ XOR } 11110000$ |
| E) $B \text{ OR } 11111111$ | L) $B \text{ XOR } 00001111$ |
| F) $B \text{ OR } 00000000$ | M) $\text{NOT } B$ |
| G) $B \text{ OR } 00000001$ | N) $\text{NOT}(\text{NOT } B)$ |

a)	h)																											
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>AND</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr></table>	0	1	0	1	1	1	0	0	AND	1	1	1	1	1	1	1	1		0	1	0	1	1	1	0	0		
0	1	0	1	1	1	0	0	AND																				
1	1	1	1	1	1	1	1																					
0	1	0	1	1	1	0	0																					

b)	i)
c)	j)
d)	k)
e)	l)
f)	m)
g)	n)
A)	H)
B)	I)
C)	J)

D)	K)
E)	L)
F)	M)
G)	N)

6. Referințe bibliografice

[1] Manta V., Ungureanu F., *Introducere în știința sistemelor și a calculatoarelor*, Volumul I, Editura "Gh.Asachi", Iași, 2002