

SISTEME DE NUMERAȚIE POZIȚIONALE. APLICAȚII PENTRU REPREZENTAREA NUMERELOR NATURALE ÎN BAZELE 2, 4, 8, 10 ȘI 16.

1. Obiective

Prin parcurgerea acestei ședințe de laborator studenții vor fi capabili:

- Să definească noțiunea de sistem de numerație pozițional;
- Să efectueze conversia unui număr din baza 10 în bazele 2, 4, 8 și 16;
- Să efectueze conversia unui număr din baza 4, 8 sau 16 în baza 2;
- Să efectueze conversia unui număr din baza 16 în baza 2, 4 sau 8;
- Să efectueze conversia unui număr din baza 2, 4, 8 sau 16 în baza 10.

2. Sisteme de numerație

Un **sistem de numerație** reprezintă un ansamblu de reguli care precizează modul de utilizare al unei mulțimi finite de simboluri, numite cifre, în scopul reprezentării valorilor numerice. Sistemele de numerație pot fi de două tipuri: **poziționale** și **nepoziționale**.

Exemple:

- 1) **Sistemul de numerație roman** care utilizează cifrele I (1), V(5), X(10), L(50), C(100), D(500), M(1000) este un **sistem de numerație nepozițional**. Sistemul de numerație roman este un **sistem aditiv-substractiv**. Numerele se obțin adunând sau scăzând cifrele după următoarele reguli:

$$XI = 10 + 1 = 11; IX = 10 - 1 = 9;$$

$$MMCCII = 2000 + 200 + 2 = 2202.$$

- 2) **Sistemul de numerație egiptean** este unul **zecimal și juxta-pozițional** însă diferit de cel actual prin modalitatea de reprezentare a cifrelor. Cifrele sale sunt obținute prin compunerea următoarelor 12 simboluri de bază:

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
						

3000	500	20	1	
  	    	 		3521

1/2	1/3	2/3	1/4	1/5

- 3) **Sistemul de numerație zecimal** care utilizează cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 este un **sistem pozițional**.

3. Sisteme de numerație poziționale

În **sistemele de numerație poziționale**, ponderea valorică a unei cifre este dată de poziția ei în cadrul reprezentării valorii numerice. Numărul de simboluri utilizate în cadrul unui sistem de numerație poartă denumirea de **bază** sau rădăcină. Baza B a unui sistem de numerație are o valoare întreagă mai mare sau egală cu 1. Ponderea cifrelor utilizate în reprezentarea unui număr este dată de bază. Baza se reprezintă în propria bază prin succesiunea de simboluri "1" și "0".

Exemple:

Sistemul	Baza	Simboluri
Sistemul zecimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
Sistemul binar	2	0, 1;
Sistemul cuaternar	4	0, 1, 2, 3; A, C, G, T;
Sistemul octal	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
Sistemul hexazecimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Pentru a înțelege numerele binare, trebuie să ne reamintim noțiunile elementare de matematică învățate în școala primară. Primele noțiuni despre numere ne învățau că sistemul zecimal este organizat pe coloane:

Mii	Sute	Zeci	Unități
5	2	9	7

astfel încât numărul 5297 provine de fapt din o mie plus două sute plus patru zeci plus șapte unități. Câțiva ani mai târziu am învățat semnificația coloanelor este:

1000	100	10	1
10^3	10^2	10^1	10^0
5	2	9	7

și că numărul 5297 este de fapt $5 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.

Sistemul de numerație zecimal folosește cifrele 0-9 pentru reprezentarea numerelor. Dacă am dori să punem în coloana 10^n un număr mai mare, de exemplu 10, trebuie să înmulțim $10 \times 10^n = 10^{n+1}$ generând deplasarea numărului cu o coloană mai la stânga. De exemplu 10 nu poate fi pus într-o singură coloană; vom avea 1 în coloana lui 10^1 și 0 în coloana 10^0 și numărul va ocupa două coloane.

Sistemul de numerație binar reprezintă sistemul de bază pentru stocarea, transferul și prelucrarea datelor pentru calculatoarele digitale și alte aparate electronice. În cazul acestora baza 2 este preferată în locul bazei 10 cu care suntem familiarizați în viața de zi cu zi. Spre deosebire de sistemul zecimal, sistemul binar utilizat de calculatoare folosește două simboluri: 0 și 1. Similar sistemului zecimal în care folosim unități, zeci, sute, etc. în sistemul de numerație binar există unități, doi, patru, opt, șaisprezece, etc.. Deoarece un comutator poate avea doar două stări: on și off acesta va permite stocarea unei singure cifre. Comutatoarele pot fi grupate însă pentru a permite stocarea unor numere mai mari. Acesta este și motivul cheie pentru care sistemul de numerație binar este utilizat în sistemele digitale. Pentru a simplifica lungimea și profitând de simplitatea conversiei din binar în hexazecimal și invers, programatorii vor folosi adeseori sistemul de numerație hexazecimal.

Sistemul de numerație binar este guvernat de aceleași principii ca și sistemul de numerație zecimal, cu deosebirea că operațiile sunt realizate în baza 2 și nu în baza 10. Cu alte cuvinte, în locul coloanelor $10^3|10^2|10^1|10^0$ vor fi coloanele $2^3|2^2|2^1|2^0$. În locul cifrelor 0-9, se vor folosi doar 0-1. Același principiu descris mai sus rămâne valabil; 3 în binar nu poate fi plasat pe o singură coloană. Deoarece 3 este mai mare decât 1, trebuie folosită o coloană suplimentară la stânga astfel obținem 11 în binar având semnificația $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.

Pentru a indica în ce sistem de numerație este scris un număr la sfârșitul reprezentării numărului se adaugă un indice inferior care precizează baza sistemului de numerație.

4. Conversia unui număr natural dintr-o bază de numerație în alta

Operația de trecere de la reprezentarea unui număr în baza B_1 la reprezentarea lui în baza B_2 se numește **conversie**. Se consideră un sistem de numerație în baza B . Reprezentarea unui număr întreg N pe n poziții se realizează prin secvența de simboluri:

$$b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1b_0$$

și verifică următoarele relații:

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i B^i$$

unde

$$0 \leq b_i < B, i = \overline{0, n-1}.$$

Coeficienții b_i se obțin prin împărțirea (întreagă) succesivă a lui N și a câturilor obținute după fiecare împărțire, cu valoarea bazei B , până se obține câtul 0. Rezultatul conversiei numărului N este constituit din resturile obținute considerate în ordinea inversă de apariție.

	Cât	Rest	
$N:B$	C_0	b_0	(LSB)
$C_0:B$	C_1	b_1	
...	...	...	
$C_{n-2}:B$	C_{n-1}	b_{n-2}	
$C_{n-1}:B$	0	b_{n-1}	(MSB)



În general, conversia dintr-o bază $B_1 \neq 10$ într-o altă bază $B_2 \neq 10$ se realizează prin intermediul bazei 10 astfel: se convertește numărul din B_1 în baza 10 și apoi în baza B_2 . Există însă situații când conversia se poate face direct, cum este cazul **conversiilor binar-cuaternar-octal-hexazecimal**. Ținând cont că baza sistemelor de numerație cuaternar, octal și hexazecimal se obține prin ridicarea la puterea a cifrei 2 se pot stabili compatibilități directe între cele patru sisteme de numerație. Astfel, conversiile folosesc faptul că orice cifră cuaternară, octală respectiv hexazecimală, poate fi reprezentată prin 2, 3, respectiv 4 cifre binare conform următoarelor reguli:

TABELUL I. CONVERSIA ÎNTRE BAZA 2 ȘI BAZELE 4, 8 ȘI 16

Regula 21		
Baza 2	Baza 4	
00	0	A
01	1	C
10	2	G
11	3	T

Regula 421	
Baza 2	Baza 8
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Regula 8421	
Baza 2	Baza 16
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A(10)
1011	B(11)
1100	C(12)
1101	D(13)
1110	E(14)
1111	F(15)

TABELUL II. PRINCIPALELE PUTERI ALE LUI 2, 4, 8 și 16

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

4^0	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7	4^8
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536

8^0	8^1	8^2	8^3	8^4	8^5
1	8	64	512	4096	32768

16^0	16^1	16^2	16^3	16^4
1	16	256	4096	65536

5. Problematica propusă pentru studiu

5.1. Să se convertească prin metoda împărțirilor succesive în bazele 2, 4, 8 și 16 următoarele numere. Să se facă verificarea la final.

a) $48_{(10)}$

	Câtul	Restul	Rezultatul
48:2	24	0	$48_{(10)} = 110000_{(2)}$
24:2	12	0	
12:2	6	0	
6:2	3	0	
3:2	1	1	
1:2	0	1	
Verificare	$110000_{(2)} = (0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5)_{(10)}$ $= 0 + 0 + 0 + 0 + 16 + 32 = 48$		

	Câtul	Restul	Rezultatul
48:4	12	0	$48_{(10)} = 300_{(4)}$
12:4	3	0	
3:4	0	3	
Verificare	$300_{(4)} = (0 \times 4^0 + 0 \times 4^1 + 3 \times 4^2)_{(10)} = 0 + 0 + 48 = 48$		

	Câtul	Restul	Rezultatul
48:8	6	0	$48_{(10)} = 60_{(8)}$
6:8	0	6	
Verificare			$60_{(8)} = (0 \times 8^0 + 6 \times 8^1)_{(10)} = 0 + 48 = 48$

	Câtul	Restul	Rezultatul
48:16	3	0	$48_{(10)} = 30_{(16)}$
3:16	0	3	
Verificare	$30_{(16)} = (0 \times 16^0 + 3 \times 16^1)_{(10)} = 0 + 48 = 48$		

b) $317_{(10)}$; c) $799_{(10)}$; d) $1119_{(10)}$; e) $4321_{(10)}$

b) $317_{(10)}$;

c) $799_{(10)}$;

d) $1119_{(10)}$;

e) $4321_{(10)}$

5.2. Să se convertească următoarele numere:

- i) din baza 4 în baza 2;
- ii) din baza 8 în bazele 2 și 4;
- iii) din baza 16 în bazele 2, 4 și 8.

a) $301_{(4)}$;

Fiecare cifră în baza 4 va fi înlocuită cu o grupare de 2 cifre în baza 2 conform tabelului de la pagina 3, sau conform Regulii 21. Vom avea următoarele grupări: 001 pentru 1; 101 pentru 5 și 111 pentru 7.

$$301_{(4)} = 11\ 00\ 01_{(2)} = 110001_{(2)};$$

b) $157_{(8)}$;

Fiecare cifră în baza 8 va fi înlocuită cu o grupare de 3 cifre în baza 2 conform tabelului de la pagina 3, sau conform Regulii 421. Vom avea următoarele grupări: 001 pentru 1; 101 pentru 5 și 111 pentru 7.

$$157_{(8)} = 001\ 101\ 111_{(2)} = 001101111_{(2)};$$

Pentru a transforma în baza 4 pe rezultatul obținut în baza 2 se vor realiza grupări de câte 2 cifre de la dreapta la stânga:

$$0\ 01\ 10\ 11\ 11_{(2)} = 00\ 01\ 10\ 11\ 11_{(2)} = 0\ 1\ 2\ 3\ 3_{(4)} = 01233_{(4)} = ACGTT_{(4)};$$

c) $A23_{(16)};$

Fiecare cifră în baza 16 va fi înlocuită cu o grupare de 4 cifre în baza 2 conform tabelului de la pagina 3, sau conform Regulii 8421. Vom avea următoarele grupări: 1010 pentru A; 0010 pentru 2 și 0011 pentru 3.

$$A23_{(16)} = 1010\ 0010\ 0011_{(2)} = 101000100011_{(2)};$$

Pentru a transforma în baza 4 pe rezultatul obținut în baza 2 se vor grupa de la dreapta la stânga câte 2 cifre și se completează prima grupare cu zerouri dacă este necesar:

$$101000100011_{(2)} = 10\ 10\ 00\ 10\ 00\ 11_{(2)} = 2\ 2\ 0\ 2\ 0\ 3_{(4)} = 220203_{(4)} = GGAGAT_{(4)};$$

Pentru a transforma în baza 8 pe rezultatul obținut în baza 2 se vor grupa de la dreapta la stânga câte 3 cifre și se completează prima grupare cu zerouri dacă este necesar:

$$101000100011_{(2)} = 101\ 000\ 100\ 011_{(2)} = 5\ 0\ 4\ 3_{(8)} = 5043_{(8)};$$

d) $302_{(4)};$

f) $243_{(8)};$

h) $18B_{(16)};$

e) $2130_{(4)};$

g) $5122_{(8)};$

i) $FF59_{(16)}.$

d) $302_{(4)};$

e) $2130_{(4)}$;

f) $243_{(8)}$;

g) $522_{(8)}$;

h) $18B_{(16)}$;

i) $FF59_{(16)}$.

5.3. Să se convertească din baza 10 în baza 2 folosind metoda puterilor lui 2 următoarele numere:

a) $48_{(10)}$;

Din numărul ce trebuie transformat se scade puterea lui 2 cea mai apropiată de 48 și mai mică decât 48, în cazul de față 32 și se continuă iterativ până la obținerea rezultatului 0 după scădere.

48-							
<u>32</u>	$32 = 2^5$	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
16-		1	1	0	0	0	0
<u>16</u>	$16 = 2^4$						
0		$48_{(10)} = 110000_{(2)}$					

b) $954_{(2)}$; c) $2022_{(10)}$; d) $3106_{(10)}$; e) $9317_{(10)}$.

b) $954_{(2)}$

c) $2022_{(10)}$;

d) $3106_{(10)}$;

e) $9317_{(10)}$;

6. Referințe bibliografice

[1] Manta V., Ungureanu F., *Introducere în știința sistemelor și a calculatoarelor*, Volumul I, Editura "Gh.Asachi", Iași, 2002