

L4. TEOREMELE ALGEBREI BINARE. FUNCȚII LOGICE ELEMENTARE. OPERAȚII LOGICE PE BIT. SINTEZA FUNCȚIILOR LOGICE DIN TABELE DE ADEVĂR

1. Obiective

Prin parcurgerea acestei ședințe de laborator studenții vor fi capabili:

- Să definească algebra Booleană;
- Să definească operațiile logice pe bit;
- Să reprezinte grafic operatorii sumă logică, produs logic și operatorul de complementare;
- Să enunțe proprietățile fundamentale ale algebrei Booleene;
- Să reprezinte o funcție logică prin tabele de adevăr, sau prin realizant sau în forma analitică;
- Să exprime funcțiile logice în formele canonice FCD și FCC.

2. Algebra Booleană

Algebra Booleană reprezintă o metodă simbolică pentru studierea relațiilor logice. Algebra Booleană este o mulțime compusă din două elemente $M = \{0,1\}$ înzestrată cu două legi de compoziție $+$ ($\cup$) și $\cdot$ ($\cap$), o lege de complementare $\bar{}$ și un set de axiome.

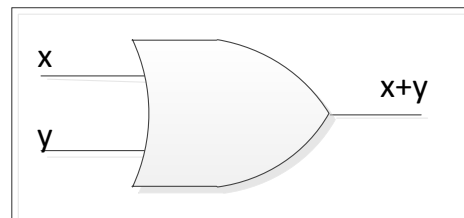
3. Operații logice elementare

3.1. Operatori binari

3.1.1. Operatorul SAU (sumă logică)

Operatorul sumă logică este simbolizat prin $+$, $\cup$, $\vee$, *SAU*, *OR* sau *DISJUNCȚIE*.

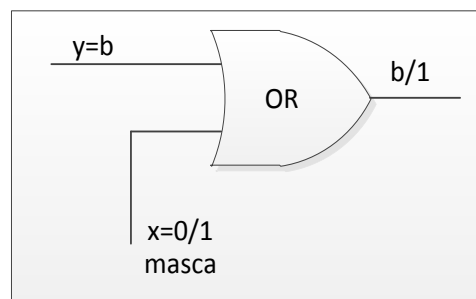
x	y	x + y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Funcția logică

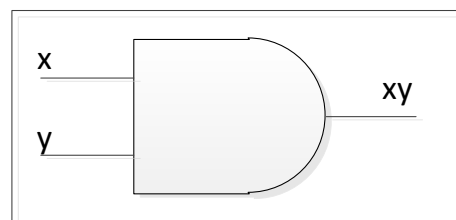
$$f = x + y$$

x	y	b
0		b
1		1



3.1.2. Operatorul ȘI (produs logic)

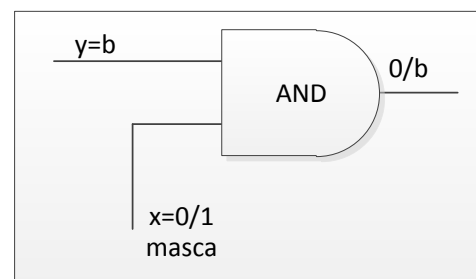
x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Funcția logică

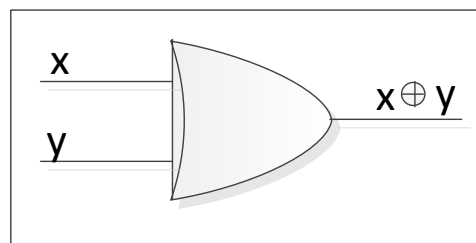
$$f = x \cdot y$$

x	y	b
0		0
1		b



3.1.3. Operatorul XOR

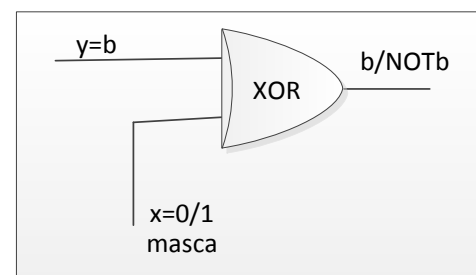
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Funcția logică

$$f = x \oplus y$$

x	y	b
0		b
1		$\bar{b}$

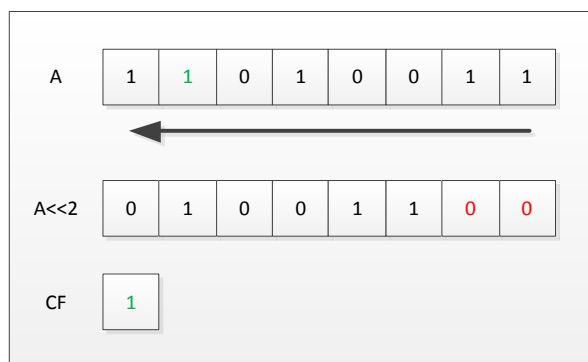


3.1.4. Operatori de deplasare

Deplasare la stânga

Se deplasează conținutul operandului la stânga cu numărul de poziții specificat, pozițiile rămase libere devenind 0. Carry Flag (CF) va conține ultimul bit deplasat în afara operandului.

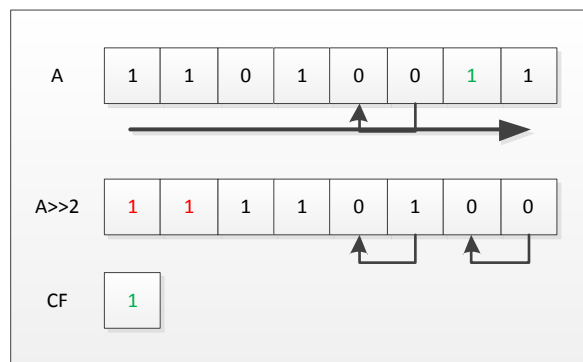
$$\begin{array}{r} x \quad 00101101 \\ d \quad 2 \\ \hline x \ll d \quad \mathbf{10110100} \end{array}$$



Deplasare aritmetică la dreapta

Se deplasează conținutul operandului la dreapta cu numărul de poziții specificat, iar bitul de semn se propagă pe pozițiile rămase libere. CF va conține bitul cel mai puțin semnificativ, ultimul deplasat.

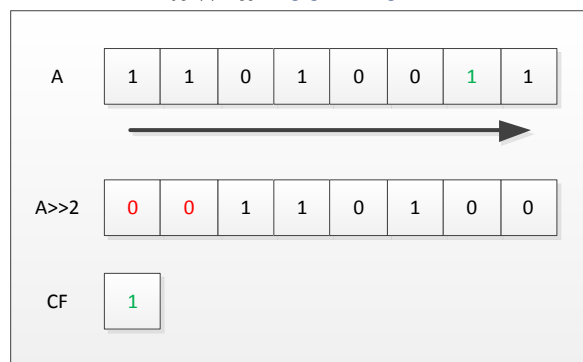
$$\begin{array}{r} x \quad 00101101 \\ d \quad 2 \\ \hline x \gg d \quad \mathbf{00001011} \\ x \quad 11101101 \\ d \quad 2 \\ \hline x \gg d \quad \mathbf{1111011} \end{array}$$



Deplasare la dreapta

Se deplasează conținutul operandului la dreapta cu numărul de poziții specificat, iar pozițiile rămase libere se completează cu 0. CF va conține bitul cel mai puțin semnificativ, ultimul deplasat.

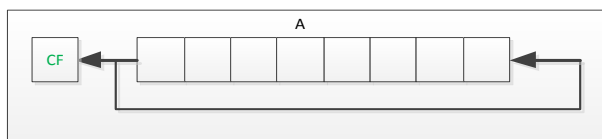
$$\begin{array}{r} x \quad 11101101 \\ d \quad 2 \\ \hline x \gg d \quad \mathbf{00111011} \end{array}$$



3.1.5. Operatorul de rotire

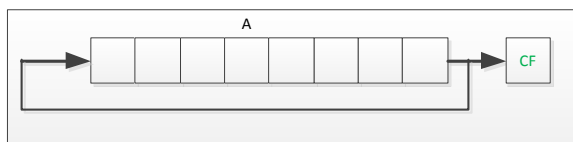
Rotire la stânga

Se rotește conținutul operandului la stânga, prin carry cu numărul de poziții specificat. Bitul CF nu face parte din rezultat, dar recepționează o copie a bitului care a fost deplasat de la un capăt la celălalt.



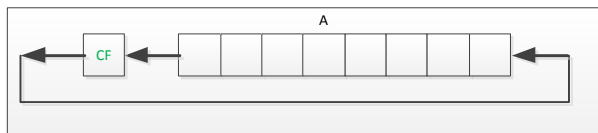
Rotire la dreapta

Se rotește conținutul operandului la dreapta, prin carry cu numărul de poziții specificat. Bitul CF nu face parte din rezultat, dar recepționează o copie a bitului care a fost deplasat de la un capăt la celălalt.



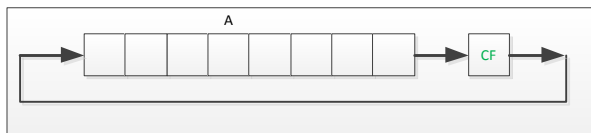
Rotire la stânga cu carry

Se rotește conținutul operandului la stânga, cu tot cu carry, cu numărul de poziții specificat. Bitul CF face parte din informația rotită.



Rotire la dreapta cu carry

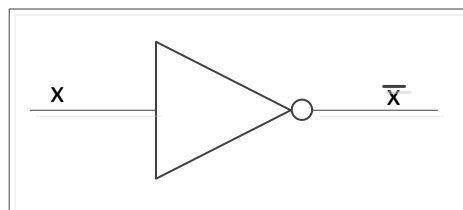
Se rotește conținutul operandului la dreapta, cu tot cu carry, cu numărul de poziții specificat. Bitul CF face parte din informația rotită.



3.2. Operatori unari

3.2.1. Operatorul NOT (de complementare)

x	$\bar{x}$
0	1
1	0



Funcția logică

$$f = \bar{x}$$

4. Proprietățile fundamentale ale algebrei Booleene

- 1) Elementele 0 și 1 sunt unice.
- 2) M este o mulțime închisă în raport cu operatorii
 $\forall x, y \in M \Rightarrow 1)x + y \in M; 2)x \cdot y \in M; 3)\bar{x} \in M.$
- 3) Elementul neutru pentru sumă este 0, iar pentru produs este 1.

4) Elementul absorbant pentru produs este 0, iar pentru sumă este 1.

5) Teorema dublei negații

$$\bar{\bar{x}} = x;$$

6) Teorema complementării

$$x \cdot \bar{x} = 0; x + \bar{x} = 1;$$

7) Teorema de idempotență

$$x + x = x; x \cdot x = x;$$

8) Teorema de absorbție

$$x + (x \cdot y) = x; x \cdot (x + y) = x;$$

9) Comutativitatea

$$x + y = y + x; x \cdot y = y \cdot x;$$

10) Asociativitatea

$$x + (y + z) = (x + y) + z; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$

11) Distributivitatea

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z; x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z);$$

12) Legile lui DeMorgan

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}; \overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}.$$

5. Funcții logice

5.1. Reprezentarea prin tablele de adevăr

Exemplu:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

5.2. Reprezentarea prin realizant

Exemple:

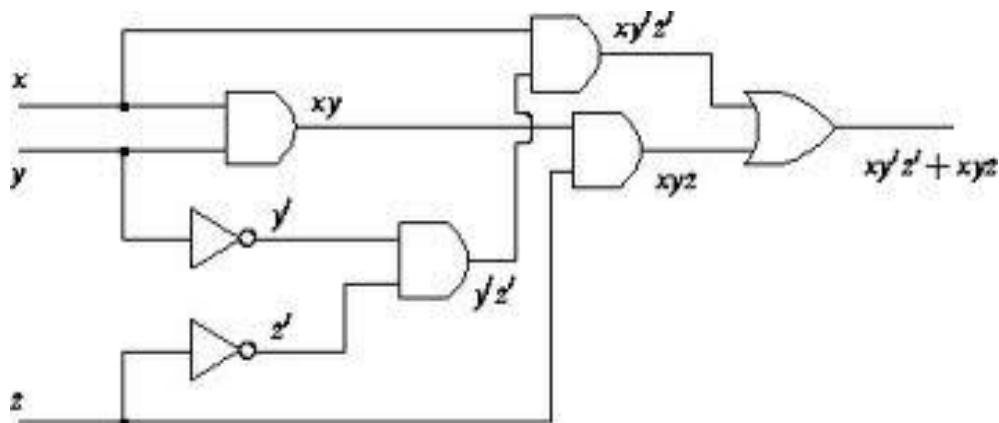
$$f(x, y, z) = R_0(0, 2, 3, 7);$$

$$f(x, y, z) = R_1(1, 4, 5, 6).$$

5.3. Reprezentarea analitică

$$f(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z.$$

5.4. Reprezentarea cu porți logice



5.5. Formele canonice ale funcțiilor logice

Un **minterm ("m")** este o expresie logică elementară definită pe fiecare combinație posibilă a tuturor variabilelor independente legate prin produs logic și care este întotdeauna evaluată cu 1 logic.

Un **maxterm ("M")** este o este o expresie logică elementară definită pe fiecare combinație posibilă a tuturor variabilelor independente legate prin sumă logică și care este întotdeauna evaluată cu 0 logic.

FCND Forma Canonică Normal Disjunctivă (suma de produse)

$$FCD = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot f_i$$

unde

n – este numărul variabilelor independente;

f_i – reprezintă valoarea funcției f pentru echivalentul zecimal i .

FCNC Forma Canonică Normal Conjunctivă (produs de sume)

$$FCC = \prod_{i=0}^{n-1} M_i + f_i$$

unde

n – este numărul variabilelor independente;

f_i – reprezintă valoarea funcției f pentru echivalentul zecimal i .

Exemplu:

Se consideră funcția $f(x, y, z) = R_1(0,2,3,7)$, tabelul de adevăr, precum și mintermii și maxtermii funcției sunt ilustrați mai jos:

Echivalentul zecimal	x	y	z	m_i	M_i	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	$m_0 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$M_0 = x + y + z$	1
1	0	0	1	$m_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$M_1 = x + y + \bar{z}$	0
2	0	1	0	$m_2 = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$M_2 = x + \bar{y} + z$	1
3	0	1	1	$m_3 = \bar{x} \cdot y \cdot z$	$M_3 = x + \bar{y} + \bar{z}$	1
4	1	0	0	$m_4 = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$M_4 = \bar{x} + y + z$	0
5	1	0	1	$m_5 = x \cdot \bar{y} \cdot z$	$M_5 = \bar{x} + y + \bar{z}$	0
6	1	1	0	$m_6 = x \cdot y \cdot \bar{z}$	$M_6 = \bar{x} + \bar{y} + z$	0
7	1	1	1	$m_7 = x \cdot y \cdot z$	$M_7 = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	1

$$FCD = m_0 \cdot 1 + m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 1 + m_3 \cdot 1 + m_4 \cdot 0 + m_5 \cdot 0 + m_6 \cdot 0 + m_7 \cdot 1;$$

$$FCC = (M_0 + 1) \cdot (M_1 + 0) \cdot (M_2 + 1) \cdot (M_3 + 1) \cdot (M_4 + 0) \cdot (M_5 + 0) \cdot (M_6 + 0) \cdot (M_7 + 1).$$

6. Aplicații propuse

6.1. Să se demonstreze următoarele echivalențe utilizând tabele de adevăr:

- $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z);$
- $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y};$
- $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}.$
- $\overline{\bar{x} + y + \bar{x} + \bar{y}} = x;$
- $\overline{x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z} = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{z}.$

6.2. Să se reprezinte prin tabele de adevăr funcțiile:

- $f(x, y, z) = R_0(1, 2, 6, 7);$
- $f(x, y, z) = R_0(2, 4);$
- $f(x, y, z) = R_1(3, 5, 6, 7);$
- $f(x, y, z) = R_1(0, 1, 5).$

6.3. Să se calculeze:

- $x + y \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x};$
- $\bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z;$
- $\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y};$
- $\overline{\bar{x} + y + \bar{x} + \bar{y}}.$

6.4. Să se descrie cu ajutorul diagramelor următoarele funcții logice:

- $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z;$
- $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y};$
- $f(x, y, z) = x + y + z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z;$

6.5. Să se scrie FCD și FCC pentru funcțiile:

- a) $f(x, y, z) = R_0(0,1,2,4);$ b) $f(x, y, z) = R_1(2,4,6,7).$

6.6. Se dau numerele:

$$A = 01011100$$

$$B = 11001001$$

Ce numere vor rezulta după aplicarea măștilor specificate?

- | | | | |
|----|---------------------|----|---------------------|
| a) | <i>AND</i> 11111111 | g) | <i>OR</i> 00000001 |
| b) | <i>AND</i> 00000000 | h) | <i>OR</i> 10000000 |
| c) | <i>AND</i> 00000001 | i) | <i>XOR</i> 11111111 |
| d) | <i>AND</i> 10000000 | j) | <i>XOR</i> 00000000 |
| e) | <i>OR</i> 11111111 | k) | <i>XOR</i> 11110000 |
| f) | <i>OR</i> 00000000 | l) | <i>XOR</i> 00001111 |

Să se calculeze și

- | | | | |
|----|--------------|----|------------------|
| m) | <i>NOT</i> A | q) | $B \gg 2$ |
| n) | <i>NOT</i> B | r) | $B \ll 3$ |
| o) | $A \gg 3$ | s) | <i>RL</i> (A, 3) |
| p) | $A \ll 2$ | t) | <i>RR</i> (B, 2) |

6.7. Se dau numerele:

$$A = a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$$

$$B = b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$$

Să se calculeze C cu ajutorul operatorilor logici și a măștilor.

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a) | $C = \overline{a_7} \overline{a_6} \overline{a_5} 010 b_3 b_2$ | d) | $C = 1111 b_7 b_6 \overline{b_5} \overline{b_4}$ |
| b) | $C = \overline{b_5} \overline{b_4} a_3 a_2 b_1 b_2 01$ | e) | $C = 00 b_7 \overline{b_6} \overline{a_5} a_4 11$ |
| c) | $C = 10 b_1 b_0 a_7 a_6 a_5 a_4$ | | |

7. Referințe bibliografice

[1] Manta V., Ungureanu F., *Introducere în știința sistemelor și a calculatoarelor*, Volumul I, Editura "Gh.Asachi", Iași, 2002